KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 27 maj, 2013

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid två tentamenstillfällen under läsåret.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

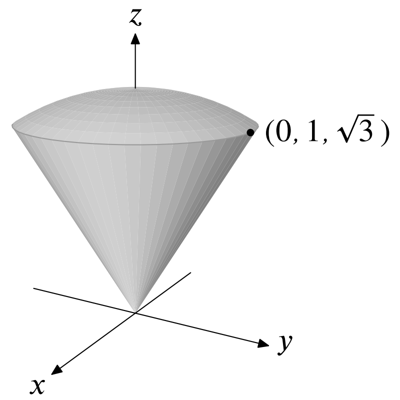
1. Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$. **(4 p)**

2. Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$. **(4 p)**

3. Låt $\boldsymbol{F} = (y^2, x^2)$ och betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$
   a) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_1$ som är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$. **(2 p)**
   b) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_3$ som är den del av enhetscirkeln i första kvadranten som går från punkten $(0, 1)$ till $(1, 0)$. **(2 p)**

DEL B

4. Kroppen K begränsas av en rak cirkulär kon och en sfär kring origo enligt figuren till höger.
   a) Beskriv K i cylindriska koordinater. **(1 p)**
   b) Beskriv K i rymdpolära (sfäriska) koordinater. **(1 p)**
   c) Beräkna
   $$\iiint_K (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$
   genom att använda något av koordinatsystemen i deluppgift a eller b. **(2 p)**



5. Beräkna arean av den del S av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger över området $0 \le x \le 1 - y^2$ i xy-planet. **(4 p)**

6. En vattendroppe landar på ytan $z = x^4 + x^2y^3 + 2x$ i punkten $(1, -1, 2)$ och där z-axeln pekar vertikalt uppåt. Därefter rinner den nedåt i ytans brantaste riktning. Ange den enhetsvektor i rummet som pekar i denna riktning. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt f vara funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

a) Visa att f är kontinuerlig i $(x,y) = (0,0)$. **(2 p)**

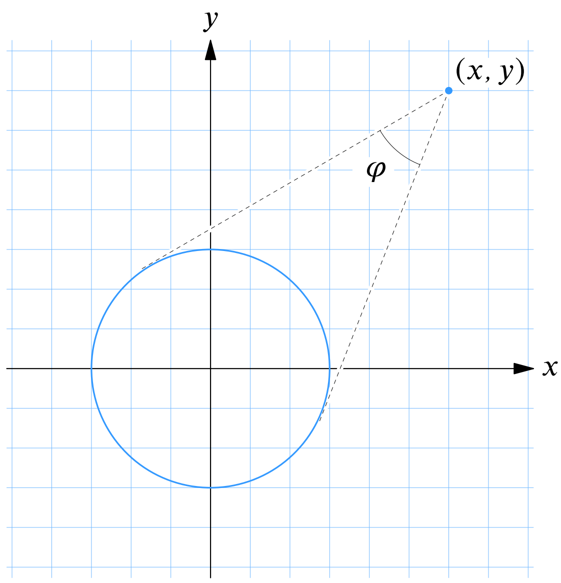
b) Visa att f är differentierbar i $(x,y) = (0,0)$. **(2 p)**

8. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy$ på den del av ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 12$ där $x \leq y$. **(4 p)**

9. Låt $\varphi(x,y)$ vara siktvinkeln vid betraktandet av enhetscirkeln från en punkt (x,y) i planet och sätt $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 > 1\}$. Undersök om

$$\iint_D \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

är konvergent eller divergent. **(4 p)**



Siktvinkeln $\varphi = \varphi(x,y)$