KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-05-27

DEL A

1. Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$. **(4 p)**

Lösning. Tangentplanet till ytan som ges av $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z = 0$ har normalvektor $\operatorname{grad} F(x, y, z) = (2x, 8y, -1)$ i punkten (x, y, z). Planet $x + y + z = 0$ har normalvektor $(1, 1, 1)$. Planen är parallella om deras normalvektorer pekar i samma riktning, alltså om

$$(2x, 8y, -1) = c(1, 1, 1)$$

för något tal $c \neq 0$. Från den tredje komponenten ser vi att detta bara är uppfyllt om $c = -1$. Första och andra komponenterna säger sedan att $x = -1/2$ och $y = -1/8$ vilket svarar mot punkten $(-1/2, -1/8, 5/16)$ på ytan. □

Svar: Punkten $(-1/2, -1/8, 5/16)$.

2. Beräkna volymen av det område som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.

(4 p)

Lösning. De två ytorna skär varandra då $x^2 = z = 2 - x^2 - 2y^2$ vilket är en kurva ovanför enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Det aktuella området ligger alltså ovanför enhetscirkelskivan $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ och begränsas underifrån av $z = x^2$ och ovanifrån av $z = 2 - x^2 - 2y^2$. Områdets volym ges av

$$V = \iint_D \left((2 - x^2 - 2y^2) - x^2\right) dx\, dy = 2 \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right)\, dx\, dy.$$

För att beräkna denna integral byter vi till polära koordinater,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\, dr \right)\, d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^1 \left(r - r^3\right)\, dr \\ &= \pi. \end{aligned}$$

□

Svar: Volymen är π.

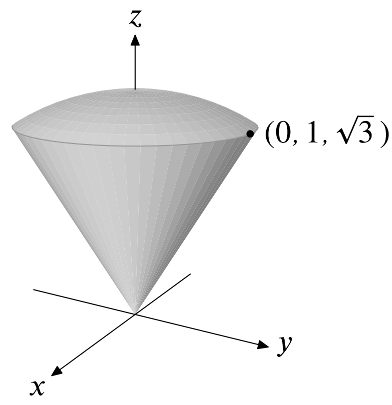
3. Låt $\boldsymbol{F} = (y^2, x^2)$ och betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$
   a) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_1$ som är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$. **(2 p)**
   b) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_3$ som är den del av enhetscirkeln i första kvadranten som går från punkten $(0, 1)$ till $(1, 0)$. **(2 p)**

Lösning. – □

Svar: –

DEL B

4. Kroppen K begränsas av en rak cirkulär kon och en sfär kring origo enligt figuren till höger.
   a) Beskriv K i cylindriska koordinater. **(1 p)**
   b) Beskriv K i rymdpolära (sfäriska) koordinater. **(1 p)**
   c) Beräkna
   $$\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$
   genom att använda något av koordinatsystemen i deluppgift a eller b. **(2 p)**



Lösning. a) Cylindriska koordinater ges av z som är avståndet till xy-planet, r som är avståndet till z-axeln, och φ som är vinkeln mot x-axeln för punktens projektion på xy-planet.
Eftersom punkten $(0, 1, \sqrt{3})$ ligger på sfären så har denna sfär radie $\sqrt{0+1+3} = 2$. Sfärens ekvation är alltså $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, eller $r^2 + z^2 = 4$. Konen beskrivs av en ekvation $z = kr$ för någon konstant k. Eftersom $(0, 1, \sqrt{3})$ ligger på konen har vi $k = \sqrt{3}$, och konens ekvation är $z = \sqrt{3}r$. Kroppen K ligger över enhetscirkelskivan. För kroppen K varierar alltså z mellan $\sqrt{3}r$ och $\sqrt{4-r^2}$, radien r mellan 0 och 1, och vinkeln φ mellan 0 och 2π.

b) Rymdpolära koordinater ges av avståndet r till origo, vinkeln φ runt z-axeln, samt vinkeln θ från z-axeln.
För kroppen K varierar r mellan 0 och 2, vinkeln φ hela varvet runt, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Vinkeln θ varierar från 0 för punkter på z-axeln till $\pi/6$ vilket är vinkeln till punkten $(0, 1, \sqrt{3})$.

c) Av symmetriskäl integreras termerna x och y till noll. Vi ska alltså beräkna

$$\iiint_K (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_K z\,dx\,dy\,dz.$$

Cylindriska koordintater: I cylindriska koordinater är volymelementet $dx\,dy\,dz = r\,dr\,dz\,d\varphi$ och integralen blir

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} rz\,dz\right)dr\right)d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r \cdot \frac{1}{2} \left(4 - r^2 - 3r^2 \right) \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(2r - 2r^3 \right) dr \right) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\varphi \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

Rymdpolära koordinater: I rymdpolära koordinater är $z = r\cos\theta$ och volymelementet $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$. Integralen överförs till

$$
\begin{aligned}
\iiint_K z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \left(\int_0^2 r\cos\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
&= 2\pi \cdot \int_0^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/6} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

$\square$

Svar:

a) $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\sqrt{3}r \le z \le \sqrt{4 - r^2}$

b) $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/6$.

c) Integralens värde är π.

5. Beräkna arean av den del S av den koniska ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ som ligger över området $0 \leq x \leq 1 - y^2$ i xy-planet. **(4 p)**

Lösning. Ytan S är parametriserad som en funktionsgraf $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definierad över det område T i xy-planet som ges av $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1 - y^2$. För en funktionsgraf $z = f(x, y)$ ges ytareaelementet dS av

$$
\begin{aligned}
dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \\
&= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y\right)^2}\, dx\, dy \\
&= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy \\
&= \sqrt{2}\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Alltså har vi att arean av ytan S är

$$
\begin{aligned}
\iint_S dS &= \iint_T \sqrt{2}\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{1-y^2} \sqrt{2}\, dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\left(1 - y^2\right)\, dy \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

□

Svar: Arean är $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

6. En vattendroppe landar på ytan $z = x^4 + x^2y^3 + 2x$ i punkten $(1, -1, 2)$ och där z-axeln pekar vertikalt uppåt. Därefter rinner den nedåt i ytans brantaste riktning. Ange den enhetsvektor i rummet som pekar i denna riktning. **(4 p)**

Lösning. Ytan är en funktionsyta $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = x^4 + x^2y^3 + 2x$. Riktningsderivatan $f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(1, -1)$ anger funktionsytans lutning i punkten som ligger ovanför punkten $(x, y) = (1, -1)$ och i riktningen $\hat{\boldsymbol{u}}$ i xy-planet. Vi ska först bestämma den riktning $\hat{\boldsymbol{u}}$ som ger minst värde på denna riktningsderivata, dvs den riktning i xy-planet i vilken funktionsytan lutar brantast nedåt.

Eftersom $f(x, y)$ är ett polynom är $f(x, y)$ differentierbar och riktningsderivatan kan beräknas med gradientformeln

$$f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}, \tag{$*$}$$

där

$$\nabla f(1, -1) = \left(4x^3 + 2xy^3 + 2, 3x^2y^2\right) \Big|_{(x,y)=(1,-1)} = (4, 3).$$

Från gradientformeln $(*)$ ser vi att $f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(1, -1)$ är som minst när $\hat{\boldsymbol{u}}$ pekar i samma riktningen som $-\nabla f(1, -1)$, dvs.

$$\hat{\boldsymbol{u}} = -\frac{\nabla f(1, -1)}{|\nabla f(1, -1)|} = -\frac{(4, 3)}{|(4, 3)|} = -\frac{(4, 3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = -\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}\right).$$

I den riktningen har riktningsderivatan värdet

$$f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}(1, -1) = \nabla f(1, -1) \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = (4, 3) \cdot \left(-\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}\right) = -5.$$

Eftersom riktningsderivatan $f'_{\hat{\boldsymbol{u}}}$ anger ändringstakten (ändring per längdenhet) för funktionsvärdet $z = f(x, y)$ i riktningen $\hat{\boldsymbol{u}}$ så är den riktning i rummet ditåt funktionsytan lutar brantast nedåt

$$\boldsymbol{v} = \left(-\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}, -5\right).$$

Enhetsvektorn i denna riktning är

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -5\right)}{\left|\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -5\right)\right|} = \frac{\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -5\right)}{\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + (-5)^2}} = \left(-\frac{4}{5\sqrt{26}}, -\frac{3}{5\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right).$$

□

Svar: Vattendroppen rinner i riktningen $\left(-\dfrac{4}{5\sqrt{26}}, -\dfrac{3}{5\sqrt{26}}, -\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)$.

DEL C

7. Låt f vara funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0), \\ \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

a) Visa att f är kontinuerlig i $(x, y) = (0, 0)$. **(2 p)**
b) Visa att f är differentierbar i $(x, y) = (0, 0)$. **(2 p)**

Lösning. a) Funktionen f är kontinuerlig i punkten $(x, y) = (0, 0)$ om $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Vi beräknar detta gränsvärde genom att gå över till polära koordinater $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Då är $(x, y) \to (0, 0)$ samma som $r \to 0$. Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\left(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi\right)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r^2\left(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

I sista likheten använde vi att de trigonometriska termern i parentesen utgör en begränsad funktion av φ, så när r går mot noll går hela uttrycket mot noll. Funktionen f är alltså kontinuerlig i origo.

b) *Alternativ 1:* Funktionen f är differentierbar i origo om den har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av origo. Vi visar detta för $\partial f/\partial x$.
I punkter $(x, y) \neq (0, 0)$ är

$$\partial f/\partial x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

vilket är en kontinuerlig funktion. I origo har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(0 + h, 0) - f(0, 0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0.$$

Som i deluppgift a) beräknar vi gränsvärdet av $\partial f/\partial x$ genom att övergå till polära koordinater,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\left(\cos^4\varphi\sin\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^5\varphi\right)}{r^4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^4\varphi\sin\varphi + 4\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^5\varphi\right)\\
&= 0\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),
\end{aligned}
$$

och vi drar slutsatsen att $\partial f/\partial x$ är kontinuerlig även i origo.
På samma sätt visar man att $\partial f/\partial y$ är en kontinuerlig funktion, och vi drar slutsatsen att f är en differentierbar funktion.

Alternativ 2: Vi kontrollerar att f är differentierbar utgående från definitionen. Enligt definitionen är f differentierbar i origo om det finns konstanter A_1, A_2, och en funktion $\rho(x,y)$ så att

$$f(0+h,0+k) - f(0,0) = A_1h + A_2k + |(h,k)|\rho(h,k)$$

och

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0.$$

Om vi löser ut ρ ur den första ekvationen ser vi att det andra villkoret är det samma som

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - A_1h - A_2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

I fall detta är uppfyllt så är konstanterna A_1 och A_2 lika med värdet av de partiella derivatorna i punkten. Ovan har vi sett dessa partiella derivator har värdet noll. Vi gör alltså den kvalificerade gissningen att $A_1 = A_2 = 0$, och visar att gränsvärdet är noll med detta val,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - A_1h - A_2k}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3k - hk^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&\qquad = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3k - hk^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}\\
&\qquad = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\left(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi\right)}{r^3}\\
&\qquad = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin^3\varphi\right)\\
&\qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Vi har alltså visat att kravet i definitionen av differentierbarhet är uppfyllt med konstanterna $A_1 = A_2 = 0$.

$\square$

Svar: –

8. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = xy$ på den del av ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 12$ där $x \leq y$. **(4 p)**

Lösning. Funktionen f är kontinuerlig och definierad på en kompakt mängd, alltså vet vi att den antar sina största och minsta värden i punkter i mängden. De största och minsta värdena finns antingen i stationära punkter i det inre av definitionsområdet, eller på randen till detta område.

Vi börjar med att leta efter stationära punkter i det inre av definitionsområdet. Vi har

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (y, x).$$

Detta är endast noll i origo vilket är en punkt på randen till området. Det finns alltså inga inre stationära punkter.

Sedan studerar vi f på randen till området. Ellipsen $x^2 + xy + y^2 = 12$ och den räta linjen $y = x$ skär varandra i de två hörnpunkterna $(2, 2)$ och $(-2, 2)$. Randen består alltså av kurvan $x^2 + xy + y^2 = 12$ för $x \leq y$ och linjen $y = x$ från $(-2, 2)$ till $(2, 2)$.

Vi använder Lagranges metod för att hitta lokala max och min på kurvan $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 12$, $x \leq y$. Lokala extrempunkter finns där $\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y)$ för någon konstant λ. Vi får

$$(y, x) = \lambda(2x + y, x + 2y)$$

eller

$$\begin{cases} 2\lambda x + (\lambda - 1)y = 0, \\ (\lambda - 1)x + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem har alltid lösningen $(x, y) = (0, 0)$, den punkten ligger dock inte på ellipsen. För att det ska finnas andra lösningar måste

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - (\lambda - 1)^2 = 0$$

vilket är uppfyllt om $\lambda = 1/3$ eller $\lambda = -1$. För $\lambda = 1/3$ har vi $x = y$ vilket ger punkterna $\pm(2, 2)$ på ellipsen. För $\lambda = -1$ har vi $x = -y$ vilket insatt i ellipsens ekvation ger $x = \pm\sqrt{12}$ och $(x, y) = \pm(\sqrt{12}, -\sqrt{12})$. Endast punkten $(-\sqrt{12}, \sqrt{12})$ uppfyller villkoret $x \leq y$.

På linjen $y = x$, $-2 \leq x \leq 2$, har vi $f(x, x) = x^2$. Vi ser att det minsta värdet är 0 som antas i $(0, 0)$ och det största värdet är 4 som antas i $\pm(2, 2)$.

Sammanfattningsvis har vi hittat följande kandidater till största och minsta värde till funktionen f,

$$f(2, 2) = 4, \quad f(-2, -2) = 4, \quad f(-\sqrt{12}, \sqrt{12}) = -12, \quad f(0, 0) = 0.$$

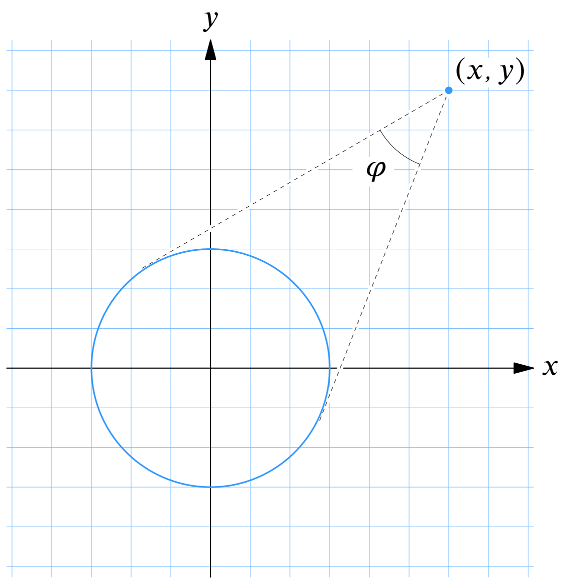
Vi ser att funktionens största värde är 4 och det minsta är -12. □

Svar: Största värde är 4 och minsta värde är -12.

9. Låt $\varphi(x, y)$ vara siktvinkeln vid betraktandet av enhetscirkeln från en punkt (x, y) i planet och sätt $D = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 > 1\}$. Undersök om

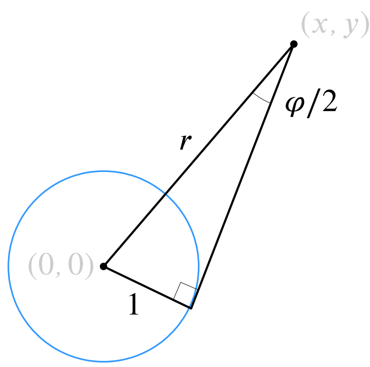
$$\iint_D \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

är konvergent eller divergent. **(4 p)**



Siktvinkeln $\varphi = \varphi(x, y)$

Lösning. Från bilden till höger ser vi att



$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{r}$$

så att

$$\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{r}\right).$$

Vi skriver integralen i polära koordinater,

$$\iint_D \varphi\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^\infty \varphi r\, dr\right) d\varphi$$
$$= 2\pi \int_1^\infty \varphi r\, dr.$$

Eftersom $\sin x \leq x$ för alla $x \geq 0$ är $\arcsin(x) \geq x$ för $x \geq 0$, och

$$\varphi r = 2 \arcsin\left(\frac{1}{r}\right) r \geq 2\, \frac{1}{r}\, r = 2.$$

Alltså har vi

$$\begin{aligned} 2\pi \int_1^\infty \varphi r \, dr &= \lim_{t\to\infty} 2\pi \int_1^t \varphi r \, dr \\ &\geq \lim_{t\to\infty} 2\pi \int_1^t 2 \, dr \\ &= \infty, \end{aligned}$$

så integralen är divergent. □

Svar: Divergent.
