Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 2, 2013-06-04, kl. 08.00 – 13.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Varje uppgift i del A bedöms antingen som godkänd eller underkänd. Varje uppgift i del B ger maximalt 4 poäng. För godkänt krävs att alla uppgifter på del A är godkända och minst 6 poäng på del B.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

Ett resultat på 7 poäng eller mer på kontrollskrivning 2 ger 4 poäng på uppgift 5 på del B, som därmed inte behöver lösas.

Del A

1. Låt

$$\begin{aligned} E &= \text{standardbasen}, \\ B &= \{(3,1,0,1),\ (1,2,1,0),\ (2,2,0,0),\ (4,1,0,3)\}, \\ B' &= \{(3,1,2,4),\ (1,2,2,1),\ (0,1,0,0),\ (1,0,0,3)\} \end{aligned}$$

vara tre baser för $\mathbf{R}^4$.

a) Ange vilken av basbytesmatriserna $P_{E\leftarrow B}$, $P_{E\leftarrow B'}$, $P_{B\leftarrow E}$, $P_{B\leftarrow B'}$, $P_{B'\leftarrow E}$ eller $P_{B'\leftarrow B}$ som är lika med matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

b) En linjär avbildning har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

i basen B. Skriv ett matlab-program som bestämmer och skriver ut den linjära avbildningens matris i basen E.

V.g. vänd!

2. a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A.

3. Betrakta följande delrum i $\mathbf{R}^3$:

$$U_1 = \text{span}\{(1,2,1),\ (-1,1,0)\} \quad \text{och} \quad U_2 = \text{span}\{(1,0,1),\ (0,1,0)\}.$$

Bestäm vilka av följande påståenden som är korrekta. Glöm inte att motivera.

a) Vektorn $(3,3,2)$ ligger i U_1.

b) Linjen $(x,y,z) = (1,0,1) + t\,(3,-1,3)$ ligger i U_2.

c) Delrummet U_1 har dimension 2.

d) Förutom nollvektorn så finns det ingen vektor som ligger både i U_1 och U_2.

4. En andragradsyta i $\mathbf{R}^3$ har ekvationen

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9.$$

a) Ange vilken typ av andragradsyta det är, dvs. klassificera ytan med namn.

b) Ytan skär xz-planet längs två räta linjer. Bestäm dessa två linjer i parameterform.

Del B

5. Låt W vara värderummet för en linjär avbildning som har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestäm en bas för W. (2 p)

b) Avgör om vektorn $\boldsymbol{u} = (1,4,6,4)$ ingår i W. (2 p)

6. En linjär avbildning i $\mathbf{R}^4$ har en symmetrisk matris A som kan diagonaliseras som

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Bestäm en ON-diagonalisering av matrisen A. (4 p)

7. En linjär avbildning i rummet $\mathbf{R}^3$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm alla vektorer $\boldsymbol{v}$ sådana att $\boldsymbol{v}$ och bildvektorn $A\boldsymbol{v}$ har samma belopp (längd). (4 p)

8. Låt $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ vara en bas för $\mathbf{R}^3$. Vi säger att vektorerna $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ är en *dual bas* för $\mathbf{R}^3$ om

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{om } i \neq j, \\ 1, & \text{om } i = j. \end{cases} \qquad (*)$$

a) Visa att villkoren $(*)$ innebär att $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ faktiskt utgör en bas för $\mathbf{R}^3$. (2 p)

b) Bestäm en dual bas $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ om

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1,0,1) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{u}_3 = (1,1,0).$$ (2 p)