Del A

1. a) $P_{B' \leftarrow E}$

   b) Vi kan direkt ställa upp basbytesmatrisen $P_{E \leftarrow B}$,

$$P_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Om vi kallar denna matris för P då kan den linjära avbildningens matris i standardbasen E skrivas som

$$P_{E \leftarrow B}\, A\, P_{B \leftarrow E} = P_{E \leftarrow B}\, A \left(P_{E \leftarrow B}\right)^{-1} = P\, A\, P^{-1}.$$

   Ett matlab-program som beräknar och skriver ut denna matris är

```
A = [3 -1 -2 0; -2 1 0 1; -1 -1 2 3; 0 -1 -5 -1];
P = [3 1 2 4; 1 2 2 1; 0 1 0 0; 1 0 0 3];
P*A/P
```

2. a) Egenvärdena ges som lösningar till den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

   som har rötterna $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$.
   Motsvarande egenvektorer fås genom att lösa egenvektorekvationen $(A - \lambda E)\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ för respektive egenvärde.

   - $\lambda = -1$: Egenvektorekvationen löser vi med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

     och egenvektorerna är alltså

$$\boldsymbol{v} = (2t, t) = t(2,1), \quad \text{där } t \text{ är en parameter.}$$

   - $\lambda = 2$: Egenvektorekvationen löser vi med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

     och egenvektorerna är alltså

$$\boldsymbol{v} = (t, 2t) = t(1,2), \quad \text{där } t \text{ är en parameter.}$$

   b) Om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ , dvs. $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, då är

$$B\boldsymbol{v} = \left(\tfrac{1}{19}A\right)\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{19}(A\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{19}\lambda\boldsymbol{v},$$

   dvs. $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till B med egenvärdet $\frac{1}{19}\lambda$.

3. a) Korrekt. Eftersom

$$(3,3,2) = 2\,(1,2,1) + (-1)\,(-1,1,0)$$

   så tillhör vektorn $(3,3,2)$ det linjära hölje som som vektorerna $(1,2,1)$ och $(-1,1,0)$ spänner upp.

b) Korrekt. Eftersom

$$\begin{aligned}(1,0,1) &= 1\,(1,0,1) + 0\,(0,1,0)\\ (3,-1,3) &= 3\,(1,0,1) - 1\,(0,1,0)\end{aligned}$$

så är

$$\begin{aligned}(1,0,1) + t\,(3,-1,3) &= 1\,(1,0,1) + 0\,(0,1,0) + t\Big[3\,(1,0,1) - 1\,(0,1,0)\Big]\\ &= (1+3t)\,(1,0,1) + (-t)\,(0,1,0).\end{aligned}$$

Detta visar att varje punkt på linjen kan skrivas som en linjärkombination av $(1,0,1)$ och $(0,1,0)$, dvs. hela linjen ligger i det linjära höljet U_2.

c) Korrekt. Vektorerna $\{(1,2,1),(-1,1,0)\}$ är en samling linjärt oberoende vektorer (eftersom de inte är en skalär multipel av varandra) och deras antal är 2 och därför har det linjära höljet dimension 2.

d) Felaktigt. Både U_1 och U_2 är två plan genom origo i rummet $\mathbf{R}^3$ och måste skära varandra utmed en linje (eftersom de inte är parallella).

4. a) Andragradsytans ekvation kan skrivas i matrisform som

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 9.$$

Om vi kallar matrisen i vänsterledet för A så ges dess egenvärden av den karakteristiska ekvationen

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 5-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda\Big((5-\lambda)^2 - 4\Big) = 0$$

som har rötterna $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ och $\lambda = 7$. Detta betyder att andragradsytans ekvation i huvudaxelform är

$$0(x')^2 + 3(y')^2 + 7(z')^2 = 9$$

som är ekvationen för en elliptisk cylinder (med axel i z-riktningen).

b) På xz-planet är $y = 0$ och detta insatt i ytans ekvation ger

$$5x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3/\sqrt{5}.$$

Skärningen mellan ytan och xz-planet består alltså av de två linjerna $\ell_1\colon x = -3/\sqrt{5}$ och $\ell_2\colon x = 3/\sqrt{5}$ i xz-planet.

För att skriva en linje i parameterform behöver vi

1. en punkt på linjen,
2. en vektor parallell med linjen.

En punkt på ℓ_1 är $(-3/\sqrt{5},0,0)$ och punkt på ℓ_2 är $(3/\sqrt{5},0,0)$. Båda linjerna är parallella med z-axeln och har därför riktningen $(0,0,1)$.

Linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har därmed parameterformen

$$\begin{aligned}\ell_1:&\quad (x,y,z) = (-3/\sqrt{5},0,0) + t\,(0,0,1),\\ \ell_2:&\quad (x,y,z) = (+3/\sqrt{5},0,0) + t\,(0,0,1),\end{aligned}$$

där t är en parameter.

Del B

5. Vi ställer upp matrisen $(A\ \boldsymbol{u})$ och radreducerar den till trappstegsform (utom sista kolumnen)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Värderummet för den linjära avbildningen är lika med kolumnrummet för matrisen A. Från slutschemat ovan ser vi att kolumn 1 och 3 innehåller en ledande etta och att övriga kolumner (utom sista) kan skrivas som linjärkombinationer av dessa. Eftersom radoperationer inte förändrar linjära samband mellan kolumnerna så betyder det att kolumn 1 och 3 i A spänner upp kolumnrummet till A. Alltså, att vektorerna $\{(-1,-1,2,2),(1,2,1,0)\}$ är en bas för W.

b) Vi ser i slutschemat att sista kolumnen (den som svarar mot $\boldsymbol{u}$) inte kan skrivas som en linjärkombination av de övriga kolumnerna. Eftersom radoperationer inte förändrar linjära samband mellan kolumnerna så betyder det att vektorn $\boldsymbol{u}$ inte kan skrivas som en linjärkombination av kolumnerna i A. Med andra ord, vektorn $\boldsymbol{u}$ tillhör inte W.

6. Från diagonaliseringen i uppgiftstexten kan vi i diagonalmatrisen avläsa att matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 2$. I motsvarande kolumner i basbytesmatriserna som flankerar diagonalmatrisen kan vi avläsa egenvektorerna. Sammanfattningsvis har vi:

Egenvärde	Egenrum
$\lambda_1 = 0$	$\operatorname{span}\{(0,1,0,-1)\}$
$\lambda_2 = 1$	$\operatorname{span}\{(1,0,-1,0),(0,-1,2,-1)\}$
$\lambda_3 = 2$	$\operatorname{span}\{(1,1,1,1)\}$

Eftersom matrisen A är symmetrisk är de tre egenrummen ortogonala och för att få en ON-bas för rummet $\mathbf{R}^4$ som består av egenvektorer behöver vi bara bestämma en ON-bas för respektive egenrum.

- $\lambda_1 = 0$: En ON-bas $\{\boldsymbol{v}_1\}$ får vi genom att normera egenvektorn $\boldsymbol{u}_1 = (0,1,0,-1)$,

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{|\boldsymbol{u}_1|} = \frac{(0,1,0,-1)}{|(0,1,0,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1).$$

- $\lambda_2 = 1$: Vi får en ON-bas $\{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ för egenrummet som spänns upp av $\boldsymbol{u}_2 = (1,0,-1,0)$

och $\boldsymbol{u}_3 = (0,-1,2,-1)$ med Gram-Schmidts ON-process,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_2 &:= \frac{\boldsymbol{u}_2}{|\boldsymbol{u}_2|} = \frac{(1,0,-1,0)}{|(1,0,-1,0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0),\\
\boldsymbol{v}_3 &:= \boldsymbol{u}_3 - (\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2\\
&= (0,-1,2,-1) - \Big[(0,-1,2,-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\Big]\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\\
&= (0,-1,2,-1) + \frac{2}{2}(1,0,-1,0)\\
&= (1,-1,1,-1),\\
\boldsymbol{v}_3 &:= \frac{(1,-1,1,-1)}{|(1,-1,1,-1)|} = \tfrac{1}{2}(1,-1,1,-1).
\end{aligned}$$

- $\lambda_3 = 2$: En ON-bas $\{\boldsymbol{v}_4\}$ fås genom att normera egenvektorn $\boldsymbol{u}_4 = (1,1,1,1)$,

$$\boldsymbol{v}_4 = \frac{\boldsymbol{u}_4}{|\boldsymbol{u}_4|} = \frac{(1,1,1,1)}{|(1,1,1,1)|} = \tfrac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Nu kan vi ställa upp en ON-diagonalisering av A ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^T.$$

7. Vi sätter $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$ och då blir bildvektorn

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2&1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+y+z\\x-z\\-x+y\end{pmatrix}.$$

Villkoret att $\boldsymbol{v}$ och $A\boldsymbol{v}$ ska ha samma belopp kan formuleras som $|\boldsymbol{v}|^2 = |A\boldsymbol{v}|^2$, vilket ger sambandet

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= (2x+y+z)^2 + (x-z)^2 + (-x+y)^2\\
&= 6x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2.
\end{aligned}$$

Flyttas termerna över i ena ledet kan detta samband skrivas som

$$5x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 = 0.$$

Vi ska alltså bestämma för vilka (x,y,z) som den kvadratiska formen i vänsterledet antar värdet 0 .

Vi skriver den kvadratiska formen i matrisform

$$\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$B = \begin{pmatrix}5&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

har egenvärden som ges som lösningar till den karakteristiska ekvationen $\det(B-\lambda E) = 0$ där determinanten beräknas till

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 8\lambda.$$

Från detta kommer vi fram till att egenvärdena är $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17})$.
Den kvadratiska formens huvudaxelform är alltså

$$0\,(x')^2 + \tfrac{1}{2}(7 - \sqrt{17})(y')^2 + \tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{17})(z')^2,$$

dvs. den är positivt semidefinit.

De vektorer $v = (x, y, z)$ för vilka den kvadratiska formen antar värdet 0 är egenrummet till B som svarar mot egenvärdet 0 och består av alla vektorer v som är lösningar till egenvektorekvationen $Bv = \mathbf{0}$. Vi löser detta linjära ekvationssystem med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Svaret är alltså vektorerna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

8. a) Vektorerna $\{v_1, v_2, v_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$ om vektorekvationen

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = \mathbf{0} \tag{†}$$

endast har lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
Skalärmultiplicera båda led i (†) med u_1,

$$c_1\, u_1 \cdot v_1 + c_2\, u_1 \cdot v_2 + c_3\, u_1 \cdot v_3 = u_1 \cdot \mathbf{0}.$$

Enligt villkoret (∗) i uppgiftstexten är $u_1 \cdot v_1 = 1$ och $u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_3 = 0$ så då blir ekvationen efter förenkling

$$c_1 = 0.$$

Genom att sedan skalärmultiplicera (†) med u_2 resp. u_3 så ger samma typ av uträkning att $c_2 = 0$ och $c_3 = 0$.
Därmed har vi lyckats visa att (†) endast har lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, dvs $\{v_1, v_2, v_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$.

b) Om villkoren (∗) för en dual bas skrivs ut i sin helhet blir de

$$\begin{aligned} u_1 \cdot v_1 &= 1, & u_1 \cdot v_2 &= 0, & u_1 \cdot v_3 &= 0, \\ u_2 \cdot v_1 &= 1, & u_2 \cdot v_2 &= 0, & u_2 \cdot v_3 &= 0, \\ u_3 \cdot v_1 &= 1, & u_3 \cdot v_2 &= 0, & u_3 \cdot v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eftersom en skalärprodukt $u \cdot v$ kan skrivas som $u^T v$, där u och v uppfattas som kolumnvektorer, så kan alla dessa villkor sammanfattas i en matrislikhet

$$\begin{pmatrix} — & u_1^T & — \\ — & u_2^T & — \\ — & u_2^T & — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T v_1 & u_1^T v_2 & u_1^T v_3 \\ u_2^T v_1 & u_2^T v_2 & u_2^T v_3 \\ u_3^T v_1 & u_3^T v_2 & u_3^T v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I detta problem är $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ och $u_3 = (1, 1, 0)$ och då blir matrisvillkoret

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi löser denna matrisekvation genom att vänstermultiplicera med inversen av $\boldsymbol{u}$-matrisen,

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 0)$ och $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1)$.