KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 22 augusti, 2013

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid två tentamenstillfällen under läsåret.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.
   a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = 1$ och $y = 2$. **(2 p)**
   b) Använd resultatet från deluppgift a för att bestämma ett närmevärde till $f(1.01, 1.97)$. **(2 p)**

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ där $D\colon 0 \le y \le x \le 1$. **(4 p)**

3. Betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ och γ är den kurva som parametriseras av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.
   a) Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**
   b) Bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av den. **(2 p)**

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ antar på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. **(4 p)**

5. Låt $f(x, y) = \cos(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)^2 + e^{-(x+y)^2}$.
   a) Bestäm Taylorutvecklingen av f till ordning två i origo. **(2 p)**
   b) Använd Taylorutvecklingen i deluppgift a för att avgöra om origo är ett lokalt max eller min, eller ingetdera, till funktionen f. **(2 p)**

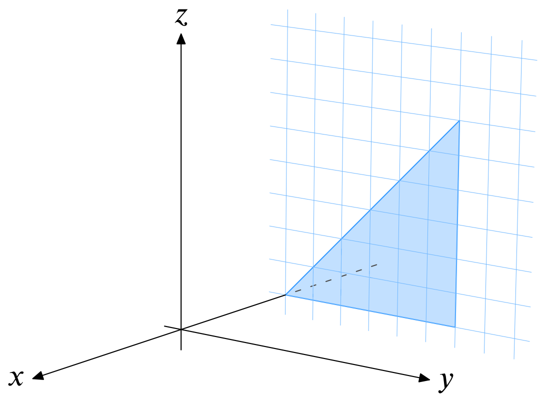
6. Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R, medelpunkt i origo och ligger ovanför xy-planet. Beräkna z-koordinaten för kroppen K:s masscentrum
$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_K z \, dx \, dy \, dz,$$
där V är volymen av K. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Ytstycket Y är den triangel i planet $x = -1$ som har hörnpunkter i $(-1, 0, 0)$, $(-1, 2, 0)$ och $(-1, 2, 2)$.

   Bestäm flödet av vektorfältet
$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{y^2 + xz^2}{1 + z^2}, \frac{x^2 + zy^2}{1 + x^2}, \frac{x^2 + yz^2}{1 + y^2} \right)$$
genom Y i riktningen bort från origo. **(4 p)**



Ytstycket Y

8. Avgör om följande gränsvärden existerar, samt beräkna i sådana fall deras värde.

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{10x^2 + 2xy + 5y^2}$ **(2 p)**

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{-1/r}$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **(2 p)**

9. Ett källfritt vektorfält $\boldsymbol{F}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ om
$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

   a) Ta fram en vektorpotential till $\boldsymbol{F} = (x, x - 3y, y + 2z)$. **(2 p)**

   b) Använd Stokes sats och vektorpotentialen i deluppgift a för att beräkna
$$\iint_S (x, x - 3y, y + 2z) \cdot d\boldsymbol{S},$$
där S är halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$. Ytelementet $d\boldsymbol{S}$ pekar bort från z-axeln. **(2 p)**