KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-08-22

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.
   a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = 1$ och $y = 2$. **(2 p)**
   b) Använd resultatet från deluppgift a för att bestämma ett närmevärde till $f(1.01, 1.97)$. **(2 p)**

Lösning. a) Tangentplanet i punkten $(1, 2)$ till funktionen $f(x, y)$ ges av

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2).$$

För funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$ har vi $f(1, 2) = \ln 1 = 0$. De partiella derivatorna av $f(x, y)$ är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot (2x + y^2)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot 2xy,$$

så

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Därmed är tangentplanets ekvation

$$z = 6(x - 1) + 4(y - 2).$$

b) Ekvationen för tangentplanet i punkten $(1, 2)$ är det förstagradspolynom i x och y som bäst approximerar $f(x, y)$ nära punkten.
För att bestämma ett närmevärde till $z = f(1.01, 1.97)$ använder vi det z-värde vi får från tangentplanets ekvation när vi sätter in $x = 1.01$ och $y = 1.97$. Detta värde är

$$z = 6(1.01 - 1) + 4(1.97 - 2) = 0.06 - 0.12 = -0.06.$$

Anm. Det approximativa värdet kan jämföras med det exakta värdet $f(1.01, 1.97) = \ln 0.939809 \approx -0.062$.

□

Svar:

a) $z = 6(x-1) + 4(y-2)$.

b) $z \simeq -0.06$.

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ där $D\colon 0 \le y \le x \le 1$. **(4 p)**

Lösning. I den givna integralen är det omöjligt att hitta en elementär primitiv funktion till integranden e^{x^2} med avseende på variabeln x. Vi beräknar alltså dubbelintegralen genom att först integrera med avseende på y. För att göra detta skriver vi integrationsområdet D som

$$D: \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx \\
&= \{t = x^2, dt = 2x\,dx, t : 0 \to 1\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(e-1).
\end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{1}{2}(e-1)$

3. Betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$

där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ och γ är den kurva som parametriseras av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.

a) Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**

b) Bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av den. **(2 p)**

Lösning. Se lösning till seminarieuppgift. □

Svar:

a) $\pi/8$

b) En potential är $U = xyz$.

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ antar på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. **(4 p)**

Lösning. Eftersom $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ är kontinuerlig och definierad på den kompakta mängden $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ så vet vi att den antar största och minsta värden i D. Dessa antas antingen i kritiska punkter i det inre av D, eller på randen ∂D.

Kritiska punkter till $f(x, y)$ ges av

$$(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = (2x + y, x + 2y),$$

vilket endast är uppfyllt då $(x, y) = (0, 0)$. Eftersom detta är en punkt i det inre av D har vi hittat en kandidat till max- eller min-punkt. Vi har $f(0, 0) = 0$.

Vi studerar nu $f(x, y)$ på ∂D. Detta kan göras med Lagranges metod, men vi väljer istället att parametrisera $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ genom

$$\theta \mapsto (x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

där $0 \leq \theta < 2\pi$. Uttryckt i θ ges $f(x, y)$ på ∂D av

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(2\cos\theta, 2\sin\theta) \\ &= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta \\ &= 4 + 4\cos\theta\sin\theta \\ &= 4 + 2\sin(2\theta). \end{aligned}$$

Detta är som störst i punkter där $\sin(2\theta) = 1$, då är $f(x, y) = 6$. Uttrycket är som minst då $\sin(2\theta) = -1$ och $f(x, y) = 2$.

Sammanfattningsvis har vi funnit att funktionens största värde är $f(x, y) = 6$ som antas på randen och dess minsta värde är $f(x, y) = 0$ som antas i origo. $\square$

Svar: max = 6, min = 0.

5. Låt $f(x,y) = \cos(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)^2 + e^{-(x+y)^2}$.
   a) Bestäm Taylorutvecklingen av f till ordning två i origo. **(2 p)**
   b) Använd Taylorutvecklingen i deluppgift a för att avgöra om origo är ett lokalt max eller min, eller ingetdera, till funktionen f. **(2 p)**

Lösning. a) Funktionen $f(x,y)$ är en summa av tre termer. Vi bestämmer dess Taylorutveckling till ordning två i origo genom att utveckla termerna var för sig.
Enligt entydighet för Taylorutvecklingen så är Taylorpolynomet för den första termen $\cos(x+y)$ detsamma som Taylorpolynomet för $\cos t$ när vi sätter $t = x+y$.

$$\cos(x+y) = 1 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + \dots. = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 + \dots.$$

Vi använder punkter ... för att beteckna resttermer som är av högre ordning än de utskrivna termerna.
Den andra termen är ett andragradspolynom, så den är redan lika med sin Taylorutveckling till andra ordningen,

$$-\frac{1}{2}(x-y)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2.$$

För den tredje termen $e^{-(x+y)^2}$ använder vi att $e^t = 1 + t + \dots$ vilket ger Taylorutvecklingen

$$e^{-(x+y)^2} = 1 + (-(x+y)^2) + \cdots = 1 - x^2 - 2xy - y^2 + \dots.$$

Tillsammans ger detta

$$\begin{aligned} &f(x,y) \\ &\quad = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2\right) + \left(1 - x^2 - 2xy - y^2\right) + \dots \\ &\quad = 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + \dots. \end{aligned}$$

Ett alternativt sätt att komma fram till denna Taylorutveckling är att använda Taylors formel, se läroboken sidan 94.

b) Från Taylorutvecklingen av $f(x,y)$ i origo ser vi omedelbart att förstaderivatorna är noll i origo, så origo är en kritisk punkt. För att avgöra dess karaktär måste vi förstå hur den blandade termen $-2xy$ påverkar uttrycket. Vi gör en kvadratkomplettering av $-2x^2 - 2xy$ och får

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2\right) - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{2}y^2 + \dots . \end{aligned}$$

Vi ser att andragradstermerna utgör ett negativt definit uttryck, så origo är ett lokalt maximum.

□

Svar:

a) $f(x, y) = 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + (x^2 + y^2)^{3/2} B(x, y)$, där B är en begränsad funktion.

b) Lokalt maximum.

6. Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R, medelpunkt i origo och ligger ovanför xy-planet. Beräkna z-koordinaten för kroppen K:s masscentrum

$$z_C = \frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz,$$

där V är volymen av K. **(4 p)**

Lösning. Kroppen K är en hälften av ett klot med radie R, alltså är dess volym

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

I rymdpolära koordinater beskrivs K av att avståndet r till origo varierar mellan 0 och R, vinkeln φ runt z-axeln varierar mellan 0 och 2π, och vinkeln θ från z-axeln varierar från 0 till $\pi/2$. Alltså,

$$K: \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

I rymdpolära koordinater är $z = r\cos\theta$ och volymelementet $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$. Tillsammans har vi

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz\\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi\\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{R^4}{4}\,d\theta\right)d\varphi\\
&= \frac{3R}{16\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)d\varphi\\
&= \frac{3R}{16\pi}\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\\
&= \frac{3R}{16\pi}\cdot 2\pi\\
&= \frac{3R}{8}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $z_c = \frac{3R}{8}$

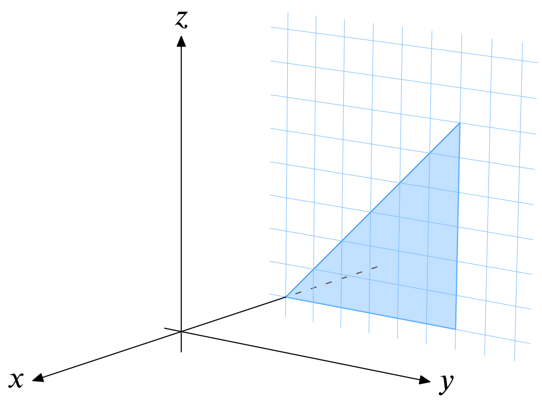
DEL C

7. Ytstycket Y är den triangel i planet $x = -1$ som har hörnpunkter i $(-1, 0, 0)$, $(-1, 2, 0)$ och $(-1, 2, 2)$.

   Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{y^2 + xz^2}{1 + z^2}, \frac{x^2 + zy^2}{1 + x^2}, \frac{x^2 + yz^2}{1 + y^2} \right)$$

genom Y i riktningen bort från origo. **(4 p)**



Ytstycket Y

Lösning. Flödet ges av

$$\iint_Y \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} \, dS,$$

där $\hat{\boldsymbol{N}}$ är enhetsnormalvektor till Y som pekar i den avsedda riktningen. I dett fall är $\hat{\boldsymbol{N}} = (-1, 0, 0)$ och

$$\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} = -\frac{y^2 + xz^2}{1 + z^2} = -\frac{y^2 - z^2}{1 + z^2} = \frac{z^2 - y^2}{1 + z^2}$$

eftersom $x = -1$ på Y. Vi ska alltså beräkna integralen

$$\iint_Y \frac{z^2 - y^2}{1 + z^2} \, dS.$$

Det verkar enklast att integrera med avseende på y först, så vi beskriver ytstycket som

$$x = -1, \quad 0 \le y \le z, \quad 0 \le z \le 2.$$

På det plana ytstycket är $dS = dy\,dz$ och flödet ges alltså av den upprepade enkelintegralen

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_0^z \frac{z^2 - y^2}{1 + z^2}\,dy \right) dz &= \int_0^2 \left[\frac{z^2 y - y^3/3}{1 + z^2} \right]_{y=0}^{y=z} dz \\
&= \int_0^2 \frac{z^3 - z^3/3}{1 + z^2}\,dz \\
&= \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{z^3}{1 + z^2}\,dz \\
&= \left\{ t = 1 + z^2,\ dt = 2z\,dz,\ t\colon 1 \to 5 \right\} \\
&= \frac{1}{3} \int_1^5 \frac{t - 1}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{3} \int_1^5 \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \frac{1}{3} \Big[t - \ln t \Big]_1^5 \\
&= \tfrac{1}{3}(4 - \ln 5).
\end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{1}{3}(4 - \ln 5)$

8. Avgör om följande gränsvärden existerar, samt beräkna i sådana fall deras värde.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{10x^2+2xy+5y^2}$ **(2 p)**

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{-1/r}$, där $r=\sqrt{x^2+y^2}$. **(2 p)**

Lösning. a) Om $(x,y)\to(0,0)$ längs x-axeln (där $y=0$) blir gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2+0^2}{10x^2+2x\cdot 0+5\cdot 0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

medan om $(x,y)\to(0,0)$ längs y-axeln (där $x=0$) blir gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{0^2+y^2}{10\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot y+5\cdot y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Eftersom uttrycket $(x^2+y^2)/(10x^2+2xy+5y^2)$ närmar sig olika värden beroende på hur (x,y) närmar sig $(0,0)$ så existerar inte det sökta gränsvärdet.

b) Vi inför polära koordinater

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

I dessa koordinater övergår gränsövergången $(x,y)\to(0,0)$ till $r\to 0^+$ och uttrycket för gränsvärdet blir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{-1/r} = \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta e^{-1/r}.$$

När $r\to 0^+$ går $-1/r\to-\infty$ och därmed går $e^{-1/r}\to 0$. Eftersom $\sin\theta$ är begränsad blir gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta e^{-1/r} &= \sin\theta\cdot\lim_{r\to 0^+} r\cdot\lim_{r\to 0^+} e^{-1/r}\\ &= \sin\theta\cdot 0\cdot 0\\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Svar:

a) Gränsvärdet existrerar inte.

b) Gränsvärdet existerar och har värdet 0.

9. Ett källfritt vektorfält $\boldsymbol{F}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ om

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

a) Ta fram en vektorpotential till $\boldsymbol{F} = (x, x - 3y, y + 2z)$. **(2 p)**

b) Använd Stokes sats och vektorpotentialen i deluppgift a för att beräkna

$$\iint_S (x, x - 3y, y + 2z) \cdot d\boldsymbol{S},$$

där S är halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \le 1$. Ytelementet $d\boldsymbol{S}$ pekar bort från z-axeln. **(2 p)**

Lösning. a) Om vi skriver $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$ så ger villkoret $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ att

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = x - 3y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y + 2z. \tag{3}$$

För att (1) ska vara uppfylld ansätter vi

$$R = axy + g_1(z),$$
$$Q = bxz + g_2(x, y)$$

där a och b är konstanter som uppfyller $a - b = 1$, och g_1 och g_2 är godtyckliga funktioner. Sambandet (2) blir då

$$\frac{\partial P}{\partial z} - ay = x - 3y$$

så vi ansätter därför

$$P = cyz + xz$$

där $c - a = -3$.
Samband (3) ger därefter att

$$bz + \frac{\partial g_2}{\partial x} - cz = y + 2z,$$

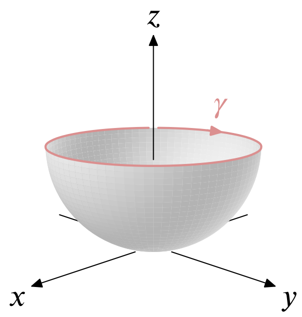
vilket är uppfyllt om $b - c = 2$ och $\partial g_2/\partial x = y$.
Välj t.ex. $g_1(z) = 0$, $g_2(x, y) = xy$ och $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$ så är (1)–(3) uppfyllda och vi har vektorpotentialen

$$\boldsymbol{A} = (xz, 2xz + xy, 3xy).$$

Anm. Det finns många korrekta svar. Alla vektorfält på formen $(xz, 2xz + xy, 3xy) + \nabla\phi$ är vektorpotentialer till $\boldsymbol{F}$.

b) Den orienterade randen till halvsfären består av en cirkel γ genomlupen enligt figuren och kan parametriseras som

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1, \end{cases} \qquad (t\colon 2\pi \to 0).$$



Stokes sats ger nu att

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_S (x, x - 3y, y + 2z) \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_S \left[\nabla \times (xz, 2xz + xy, 3xy)\right] \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \int_\gamma (xz, 2xz + xy, 3xy) \cdot d\boldsymbol{r}.
\end{aligned}$$

Med parametriseringen får vi att kurvintegralen blir

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_{2\pi}^{0} (\cos t, 2\cos t + \cos t \sin t, 3\cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\
&= \int_{2\pi}^{0} (-\cos t \sin t + 2\cos^2 t + \cos^2 t \sin t)\, dt \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

□

Svar:

a) T.ex. $\boldsymbol{A} = (xz, 2xz + xy, 3xy)$

b) -2π