KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2013-08-22

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.

   a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = 1$ och $y = 2$. **(2 p)**

   b) Använd resultatet från deluppgift a för att bestämma ett närmevärde till $f(1.01, 1.97)$. **(2 p)**

Lösning. a) Tangentplanet i punkten $(1, 2)$ till funktionen $f(x, y)$ ges av

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2).$$

För funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$ har vi $f(1, 2) = \ln 1 = 0$. De partiella derivatorna av $f(x, y)$ är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot (2x + y^2)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot 2xy,$$

så

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Därmed är tangentplanets ekvation

$$z = 6(x - 1) + 4(y - 2).$$

b) Ekvationen för tangentplanet i punkten $(1, 2)$ är det förstagradspolynom i x och y som bäst approximerar $f(x, y)$ nära punkten.
För att bestämma ett närmevärde till $z = f(1.01, 1.97)$ använder vi det z-värde vi får från tangentplanets ekvation när vi sätter in $x = 1.01$ och $y = 1.97$. Detta värde är

$$z = 6(1.01 - 1) + 4(1.97 - 2) = 0.06 - 0.12 = -0.06.$$

Anm. Det approximativa värdet kan jämföras med det exakta värdet $f(1.01, 1.97) = \ln 0.939809 \approx -0.062$.

$\square$

Svar:

a) $z = 6(x-1) + 4(y-2)$.
b) $z \simeq -0.06$.

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ där $D\colon 0 \le y \le x \le 1$. **(4 p)**

Lösning. I den givna integralen är det omöjligt att hitta en elementär primitiv funktion till integranden e^{x^2} med avseende på variabeln x. Vi beräknar alltså dubbelintegralen genom att först integrera med avseende på y. För att göra detta skriver vi integrationsområdet D som

$$D: \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx \\
&= \{t = x^2, dt = 2x\,dx, t : 0 \to 1\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(e-1).
\end{aligned}$$

□

Svar: $\frac{1}{2}(e-1)$

3. Betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},$$
där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ och γ är den kurva som parametriseras av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$.

   a) Beräkna kurvintegralen genom att använda kurvans parametrisering. **(2 p)**

   b) Bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$ och beräkna kurvintegralen med hjälp av den. **(2 p)**

Lösning. Se lösning till seminarieuppgift. □

Svar:

a) $\pi/8$

b) En potential är $U = xyz$.

DEL B

4. Bestäm största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ antar på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 4$. **(4 p)**

Lösning. Eftersom $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ är kontinuerlig och definierad på den kompakta mängden $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ så vet vi att den antar största och minsta värden i D. Dessa antas antingen i kritiska punkter i det inre av D, eller på randen ∂D.

Kritiska punkter till $f(x, y)$ ges av

$$(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = (2x + y, x + 2y),$$

vilket endast är uppfyllt då $(x, y) = (0, 0)$. Eftersom detta är en punkt i det inre av D har vi hittat en kandidat till max- eller min-punkt. Vi har $f(0, 0) = 0$.

Vi studerar nu $f(x, y)$ på ∂D. Detta kan göras med Lagranges metod, men vi väljer istället att parametrisera $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ genom

$$\theta \mapsto (x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

där $0 \leq \theta < 2\pi$. Uttryckt i θ ges $f(x, y)$ på ∂D av

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(2\cos\theta, 2\sin\theta) \\ &= 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta \\ &= 4 + 4\cos\theta\sin\theta \\ &= 4 + 2\sin(2\theta). \end{aligned}$$

Detta är som störst i punkter där $\sin(2\theta) = 1$, då är $f(x, y) = 6$. Uttrycket är som minst då $\sin(2\theta) = -1$ och $f(x, y) = 2$.

Sammanfattningsvis har vi funnit att funktionens största värde är $f(x, y) = 6$ som antas på randen och dess minsta värde är $f(x, y) = 0$ som antas i origo. $\square$

Svar: max = 6, min = 0.

5. Låt $f(x, y) = \cos(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)^2 + e^{-(x+y)^2}$.
   a) Bestäm Taylorutvecklingen av f till ordning två i origo. **(2 p)**
   b) Använd Taylorutvecklingen i deluppgift a för att avgöra om origo är ett lokalt max eller min, eller ingetdera, till funktionen f. **(2 p)**

Lösning. a) Funktionen $f(x, y)$ är en summa av tre termer. Vi bestämmer dess Taylorutveckling till ordning två i origo genom att utveckla termerna var för sig.
Enligt entydighet för Taylorutvecklingen så är Taylorpolynomet för den första termen $\cos(x + y)$ detsamma som Taylorpolynomet för $\cos t$ när vi sätter $t = x + y$.

$$\cos(x + y) = 1 - \frac{1}{2}(x + y)^2 + \ldots. = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 + \ldots.$$

Vi använder punkter $\ldots$ för att beteckna resttermer som är av högre ordning än de utskrivna termerna.
Den andra termen är ett andragradspolynom, så den är redan lika med sin Taylorutveckling till andra ordningen,

$$-\frac{1}{2}(x - y)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2.$$

För den tredje termen $e^{-(x+y)^2}$ använder vi att $e^t = 1 + t + \ldots$ vilket ger Taylorutvecklingen

$$e^{-(x+y)^2} = 1 + (-(x + y)^2) + \cdots = 1 - x^2 - 2xy - y^2 + \ldots.$$

Tillsammans ger detta

$$\begin{aligned} &f(x, y) \\ &\quad = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2\right) + \left(1 - x^2 - 2xy - y^2\right) + \ldots \\ &\quad = 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Ett alternativt sätt att komma fram till denna Taylorutveckling är att använda Taylors formel, se läroboken sidan 94.

b) Från Taylorutvecklingen av $f(x, y)$ i origo ser vi omedelbart att förstaderivatorna är noll i origo, så origo är en kritisk punkt. För att avgöra dess karaktär måste vi förstå hur den blandade termen $-2xy$ påverkar uttrycket. Vi gör en kvadratkomplettering av $-2x^2 - 2xy$ och får

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2\right) - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y^2 + \dots \\ &= 2 - 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{3}{2}y^2 + \dots . \end{aligned}$$

Vi ser att andragradstermerna utgör ett negativt definit uttryck, så origo är ett lokalt maximum.

□

Svar:

a) $f(x,y) = 2 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 + (x^2+y^2)^{3/2}\boldsymbol{B}(x,y)$, där $\boldsymbol{B}$ är en begränsad funktion.

b) Lokalt maximum.

6. Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R, medelpunkt i origo och ligger ovanför xy-planet. Beräkna z-koordinaten för kroppen K:s masscentrum

$$z_C = \frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz,$$

där V är volymen av K. **(4 p)**

Lösning. Kroppen K är en hälften av ett klot med radie R, alltså är dess volym

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

I rymdpolära koordinater beskrivs K av att avståndet r till origo varierar mellan 0 och R, vinkeln φ runt z-axeln varierar mellan 0 och 2π, och vinkeln θ från z-axeln varierar från 0 till $\pi/2$. Alltså,

$$K: \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

I rymdpolära koordinater är $z = r\cos\theta$ och volymelementet $dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$. Tillsammans har vi

$$\begin{aligned}
z_c &= \frac{1}{V}\iiint_K z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi \\
&= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{R^4}{4}\,d\theta\right)d\varphi \\
&= \frac{3R}{16\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)d\varphi \\
&= \frac{3R}{16\pi}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \\
&= \frac{3R}{16\pi}\cdot 2\pi \\
&= \frac{3R}{8}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $z_c = \frac{3R}{8}$

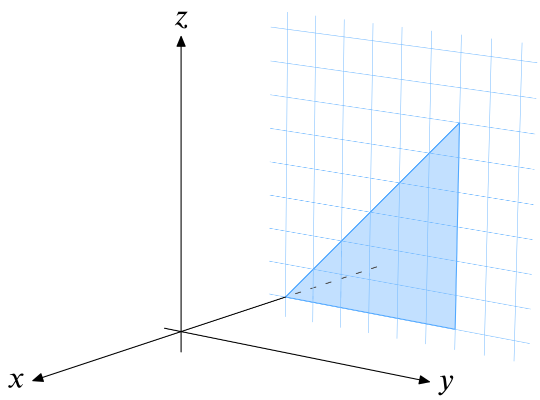
DEL C

7. Ytstycket Y är den triangel i planet $x = -1$ som har hörnpunkter i $(-1, 0, 0)$, $(-1, 2, 0)$ och $(-1, 2, 2)$.

   Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{y^2 + xz^2}{1 + z^2}, \frac{x^2 + zy^2}{1 + x^2}, \frac{x^2 + yz^2}{1 + y^2} \right)$$

genom Y i riktningen bort från origo. **(4 p)**



Ytstycket Y

Lösning. Flödet ges av

$$\iint_Y \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\, dS,$$

där $\hat{\boldsymbol{N}}$ är enhetsnormalvektor till Y som pekar i den avsedda riktningen. I dett fall är $\hat{\boldsymbol{N}} = (-1, 0, 0)$ och

$$\boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} = -\frac{y^2 + xz^2}{1 + z^2} = -\frac{y^2 - z^2}{1 + z^2} = \frac{z^2 - y^2}{1 + z^2}$$

eftersom $x = -1$ på Y. Vi ska alltså beräkna integralen

$$\iint_Y \frac{z^2 - y^2}{1 + z^2}\, dS.$$

Det verkar enklast att integrera med avseende på y först, så vi beskriver ytstycket som

$$x = -1, \quad z \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

På det plana ytstycket är $dS = dy\,dz$ och flödet ges alltså av den upprepade enkelintegralen

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \Big(\int_z^2 \frac{z^2 - y^2}{1+z^2}\,dy \Big)\,dz &= \int_0^2 \Big[\frac{z^2 y - y^3/3}{1+z^2} \Big]_{y=z}^{y=2} dz \\
&= \int_0^2 \Big(\frac{2z^2 - 8/3}{1+z^2} - \frac{z^3 - z^3/3}{1+z^2} \Big)\,dz \\
&= \int_0^2 \Big(\frac{2(1+z^2)}{1+z^2} - \frac{8/3+2}{1+z^2} - \frac{2}{3}\frac{z^3}{1+z^2} \Big)\,dz \\
&= \int_0^2 2\,dz - \frac{14}{3}\int_0^2 \frac{1}{1+z^2}\,dz - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{z^3}{1+z^2}\,dz \\
&= \Big[2z \Big]_0^2 - \frac{14}{3}\Big[\arctan z \Big]_0^2 - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{z^3}{1+z^2}\,dz \\
&= 4 - \tfrac{14}{3}\big(\arctan 2 - \arctan 0\big) - \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{z^3}{1+z^2}\,dz \\
&= \big\{ t = 1+z^2,\ dt = 2z\,dz,\ t\colon 1 \to 5 \big\} \\
&= 4 - \tfrac{14}{3}\arctan 2 - \frac{1}{3}\int_1^5 \frac{t-1}{t}\,dt \\
&= 4 - \tfrac{14}{3}\arctan 2 - \frac{1}{3}\Big[t - \ln t \Big]_1^5 \\
&= 4 - \tfrac{14}{3}\arctan 2 - \tfrac{1}{3}\big(4 - \ln 5\big) \\
&= \tfrac{8}{3} - \tfrac{14}{3}\arctan 2 + \tfrac{1}{3}\ln 5.
\end{aligned}
$$

□

Svar: $\frac{8}{3} - \frac{14}{3}\arctan 2 + \frac{1}{3}\ln 5$

8. Avgör om följande gränsvärden existerar, samt beräkna i sådana fall deras värde.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{10x^2+2xy+5y^2}$ **(2 p)**

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{-1/r}$, där $r=\sqrt{x^2+y^2}$. **(2 p)**

Lösning. a) Om $(x,y)\to(0,0)$ längs x-axeln (där $y=0$) blir gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2+0^2}{10x^2+2x\cdot 0+5\cdot 0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{10} = \frac{1}{10},$$

medan om $(x,y)\to(0,0)$ längs y-axeln (där $x=0$) blir gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} \frac{0^2+y^2}{10\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot y+5\cdot y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Eftersom uttrycket $(x^2+y^2)/(10x^2+2xy+5y^2)$ närmar sig olika värden beroende på hur (x,y) närmar sig $(0,0)$ så existerar inte det sökta gränsvärdet.

b) Vi inför polära koordinater

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

I dessa koordinater övergår gränsövergången $(x,y)\to(0,0)$ till $r\to 0^+$ och uttrycket för gränsvärdet blir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} ye^{-1/r} = \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta e^{-1/r}.$$

När $r\to 0^+$ går $-1/r\to-\infty$ och därmed går $e^{-1/r}\to 0$. Eftersom $\sin\theta$ är begränsad blir gränsvärdet

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+} r\sin\theta e^{-1/r} &= \sin\theta\cdot\lim_{r\to 0^+} r\cdot\lim_{r\to 0^+} e^{-1/r}\\ &= \sin\theta\cdot 0\cdot 0\\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Svar:

a) Gränsvärdet existrerar inte.

b) Gränsvärdet existerar och har värdet 0.

9. Ett källfritt vektorfält $\boldsymbol{F}$ har en vektorpotential $\boldsymbol{A}$ om

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

a) Ta fram en vektorpotential till $\boldsymbol{F} = (x, x - 3y, y + 2z)$. **(2 p)**

b) Använd Stokes sats och vektorpotentialen i deluppgift a för att beräkna

$$\iint_S (x, x - 3y, y + 2z) \cdot d\boldsymbol{S},$$

där S är halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$. Ytelementet $d\boldsymbol{S}$ pekar bort från z-axeln. **(2 p)**

Lösning. a) Om vi skriver $\boldsymbol{A} = (P, Q, R)$ så ger villkoret $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ att

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = x - 3y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y + 2z. \tag{3}$$

För att (1) ska vara uppfylld ansätter vi

$$R = axy + g_1(z),$$
$$Q = bxz + g_2(x, y)$$

där a och b är konstanter som uppfyller $a - b = 1$, och g_1 och g_2 är godtyckliga funktioner. Sambandet (2) blir då

$$\frac{\partial P}{\partial z} - ay = x - 3y$$

så vi ansätter därför

$$P = cyz + xz$$

där $c - a = -3$.

Samband (3) ger därefter att

$$bz + \frac{\partial g_2}{\partial x} - cz = y + 2z,$$

vilket är uppfyllt om $b - c = 2$ och $\partial g_2/\partial x = y$.

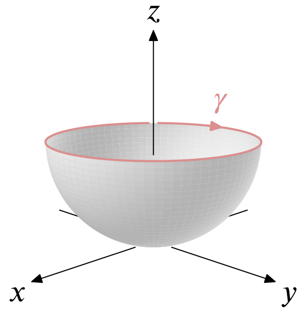
Välj t.ex. $g_1(z) = 0$, $g_2(x, y) = xy$ och $a = 3$, $b = 2$, $c = 0$ så är (1)–(3) uppfyllda och vi har vektorpotentialen

$$\boldsymbol{A} = (xz, 2xz + xy, 3xy).$$

Anm. Det finns många korrekta svar. Alla vektorfält på formen $(xz, 2xz + xy, 3xy) + \nabla\phi$ är vektorpotentialer till $\boldsymbol{F}$.

b) Den orienterade randen till halvsfären består av en cirkel γ genomlupen enligt figuren och kan parametriseras som

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1, \end{cases} \qquad (t : 2\pi \to 0).$$



Stokes sats ger nu att

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S (x, x-3y, y+2z)\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \iint_S \left[\nabla \times (xz, 2xz+xy, 3xy)\right]\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \int_\gamma (xz, 2xz+xy, 3xy)\cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Med parametriseringen får vi att kurvintegralen blir

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{2\pi}^{0} (\cos t, 2\cos t + \cos t \sin t, 3\cos t \sin t)\cdot(-\sin t, \cos t, 0)\, dt\\ &= \int_{2\pi}^{0} (-\cos t \sin t + 2\cos^2 t + \cos^2 t \sin t)\, dt\\ &= -2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt\\ &= -\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\, dt\\ &= -2\pi.\end{aligned}$$

□

Svar:

a) T.ex. $\boldsymbol{A} = (xz, 2xz+xy, 3xy)$

b) -2π