DN1230 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
Onsdagen den 29 maj 2013

Skrivtid: 8-13

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Anna-Karin Tornberg

Betygsgränser:

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Poäng	34	30	26	21	18	17

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Lycka till!

Uppgift 1 (6 poäng)

a) Följande linje i $\mathbb{R}^2$ är given, $x - 4y + 8 = 0$.

   i) Skriv upp linjens vektorekvation, $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{v}$.

   ii) Visa att vektorn $\mathbf{n} = (1, -4)$ är ortgonal mot den givna linjen.

b) Om rangen av en 9×10 matris, A, är 5 ($\text{rank}(A) = 5$) viken dimension har då matrisen A's nollrum?

c) Följande linjära system är givet

$$(5-k)x + y = 1$$
$$6x + (6-k)y = k$$

där k är en godtycklig konstant.

   i) För vilket värde/vilka värden på k har systemet en unik lösning?

   ii) För vilket värde/vilka värden på k är systemet inkonsistent?

d) Låt $\mathbf{y} = (7, 6)$ och $\mathbf{x} = (4, 2)$. Skriv vektorn $\mathbf{y}$ som en summa av två ortogonala vektorer, en vektor i $\text{Span}\{\mathbf{x}\}$ och en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{x}$.

Lösning:

a,i) Låt $P1(0,2)$ och $P2(-4,1)$ vara två punkter på linjen. $\overrightarrow{P1P2} = (0+4, 2-1)$ är då en vektor parallell med linjen som kan skrivas $\mathbf{x} = (0,2) + t(4,1)$

a,ii) För att $\mathbf{n}$ ska vara ortgonal mot linjen krävs att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ vilket stämmer eftersom $(1,-4) \cdot (4,1) = 0$

b) $rank(A) + nullity(A) = n$ dvs dimensionen av A's nollrum är 5.

c,i) Unik lösning om koefficientmatrisen, $A = \begin{bmatrix} 5-k & 1 \\ 6 & 6-k \end{bmatrix}$, är inverterbar, dvs om $det(A) \neq 0$. $det(A) = (5-k)(6-k) - 6 = (k-3)(k-8)$. Dvs systemet har en unik lösning om $k \neq 3$ eller $k \neq 8$.

c,ii) När $k = 8$ är systemet inkonsistent. (När $k = 3$har systemet oändligt många lösningar.)

d) Vi kan skriva $\mathbf{y}$ som $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + \mathbf{z}$. För att bestämma α kan vi använda oss av ortogonaliteten mellan $\mathbf{z}$ och $\mathbf{x}$ och skalärmultiplicera med $\mathbf{x}$ på båda sidor,

$\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \to \alpha = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = 2.$

När vi har α kan vi beräka $\mathbf{z}$ som $(7,6) = 2(4,2) + \mathbf{z} \to \mathbf{z} = (-1,2)$ och vi får att $\mathbf{y} = (8,4) + (-1,2)$

Uppgift 2 (4 poäng)

Följande datapunkter är givna $(0,0), (1,1)$ samt $(2,3)$.

a) Hitta den räta linje $y = a_0 + a_1 x$ som är bäst anpassad till punkterna i minsta kvadratmetodens mening.

b) Hitta det andragradpolynom $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ som går genom alla tre punkterna.

Lösning:

a) Sätt in datapunkterna i den givna ansatsen

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 0 &= 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 &= 1 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 &= 3 \end{aligned}$$

Detta kan vi skriva på formen $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

För att lösa systemet, ställ upp normalekvationerna $A^T A\mathbf{a} = A^T\mathbf{b}$ och lös dessa för $\mathbf{a}$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Detta ger att $\mathbf{a}$=(-1/6,3/2) och $y = -1/6 + 3/2x$

b) a) Sätt in datapunkterna i den givna ansatsen

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 &= 0 \\ c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 &= 1 \\ c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 &= 3 \end{aligned}$$

Detta kan vi skriva på formen $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Systemet löses för $\mathbf{c} = (0, 1/2, 1/2)$ vilket ger att $y = 1/2x + 1/2x^2$.

Uppgift 3 (5 poäng)

a) Lös följande linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 5 \\ y - z + 2w &= 8 \\ 2x - y - 3z + 4w &= 18. \end{aligned}$$

b) Systemet i a) kan skrivas på formen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ och $\mathbf{b} = (5, 8, 18)$. Bestäm en bas för A's nollrum.

a) Matrisen på reducerad rad-echelon form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi har en fri parameter, w, som vi sätter till $w = s$ (godtyckligt reellt tal). Lösningen blir:

$$\begin{aligned} x &= 13 - 3s \\ y &= 8 - 2s \\ z &= 0 \\ w &= s \end{aligned}$$

som också kan skrivas på formen

$$\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Matrisens nollrum ges av lösningsrummet till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. På samma sätt som tidigare reducerar vi matrisen till rad-echelon form men nu har vi nollor i högerledet istället.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösningen kan skrivas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs $null(A) = \text{Span}\{(-3, -2, 0 - 1)\}$ och vektorn $\mathbf{v} = ((-3, -2, 0 - 1))$ är en bas för $null(A)$.

Uppgift 4 (5 poäng)

Låt $U = \text{Span}\{(-1, 0, 2, 1), (-2, 1, 1, 2), (1, 0, 1, -1)\}$, ett underrum av $\mathbb{R}^4$.

a) Bestäm en ortogonal bas för U.

b) Definiera och ange det ortogonala komplementet ($U^{\perp}$) of U.

Lösning a): Låt $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 1, 1, 2)$ och tag $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Beräkna

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = (-2, 1, 1, 2) - \frac{2+2+2}{6}(-1, 0, 2, 1) = (-1, 1, -1, 1).$$

Låt $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, -1)$. Beräkna

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, -1) - 0 - \frac{-3}{4}(-1, 1, -1, 1) = \frac{1}{4}(1, 3, 1, -1).$$

Definiera $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 1, -1)$.

En ortogonal bas för U är $\{(-1,0,2,1),(-1,1,-1,1),(1,3,1,-1)\}$.

Lösning b): $U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_i = 0,\ i = 1,2,3\}$, där $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ är basvektorerna för U definierade ovan. Sagt i ord, så är det ortogonala komplementet till U det underrum av $\mathbb{R}^4$ innehållande alla vektorer i $\mathbb{R}^4$ som är ortogonala mot alla vektorer i U, vilket de är om de är ortogonala mot basvektorerna för U.

Utnyttja det faktum att nollrummet till en matris är det ortogonala komplementet till radrummet av matrisen. Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ utgöra rader i en matris A, och lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gauss elimination ger $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3 = 0$, x_4 fri. Dvs lösningen är på formen $(x_4, 0, 0, x_4) = x_4(1,0,0,1)$, och nollrummet är $\text{Span}\{(1,0,0,1)\}$. Dvs, $U^\perp = \text{Span}\{(1,0,0,1)\}$.

Uppgift 5 (5 poäng)

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna egenvärdena för A.

b) För vilket värde/vilka värden på k är A diagonaliserbar?

c) För vilket värde/vilka värden på k är A inverterbar?

Lösning a): Bestäm egenvärdena till A:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & k-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (k-\lambda)(\lambda^2-1-8) \\ &= -(\lambda-k)(\lambda+3)(\lambda-3).\end{aligned}$$

Dvs, vi har egenvärden $\lambda = -3, 3, k$.

Lösning b): Om $k \neq -3$ och $k \neq 3$, så har vi tre enkla egenvärden. Dessa tre egenvärden kommer att ha egenrum av dimension 1, och vi vet att matrisen är diagonaliserbar. Om $k = -3$ eller $k = 3$ så har vi ett dubbelt egenvärde, och måste kontrollera dimensionen på tillhörande egenrum.

Låt $k = 3$, vilket ger det dubbla egenvärdet $\lambda = 3$.

$$(A-3I)\mathbf{v} = 0 \to \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har endast en nollskild ekvation, och alltså två fria variabler. Dimensionen på egenrummet kommer att vara 2. Dvs matrisen är diagonaliserbar.

Samma beräkning görs för $k = -3$, vilket ger det dubbla egenvärdet $\lambda = 3$. Slutsatsen blir det samma, även i detta fallet så är dimensionen av egenrummet 2 och matrisen är diagonaliserbar.

Dvs, matrisen är diagonaliserbar för alla k.

Lösning c): Determinanten av A kan räknas ut som produkten av egenvärdena. Vi får det $A = -9k$, vilket blir 0 endast för $k = 0$. Dvs matrisen är inverterbar om $k \neq 0$.

Uppgift 6 (5 poäng)

Låt $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0), \mathbf{e_2} = (0, 1, 0)$ samt $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$.

a) Visa att vektorerna $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ och $\mathbf{v}$ är linjärt oberoende samt skriv vektorn $\mathbf{e_3} = (0, 0, 1)$ som en linjärkombination av $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ och $\mathbf{v}$.

b) Följande linjära transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, är sådan att

$$T(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e_2}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hitta transformationens standardmatris.

Lösning:

a) Skriv $\mathbf{e_3}$ som en linjärkombination av vektorerna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(2, 1, 1)$, $\mathbf{e_3} = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(2, 1, 1)$. Vi behöver räkna ut a, b och c dvs lös systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger oss att $\mathbf{e_3}$ kan skrivas som $\mathbf{e_3} = -2(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + (2, 1, 1)$.

b) Transformationen standardmatris, A, är given av att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, där A ges av $A = [T(\mathbf{e_1}) \quad T(\mathbf{e_2}) \quad T(\mathbf{e_3})]$. I uppgiften har vi redan $T(\mathbf{e_1})$ och $T(\mathbf{e_2})$ givna. Vi behöver bestämma $T(\mathbf{e_3})$. Här använder vi oss av att $\mathbf{e_3}$ kan skrivas som en linjärkombination av de vektorer för vilka vi känner till transformationen. Dvs $T(\mathbf{e_3}) = -2T(1, 0, 0) - T(0, 1, 0) + T(2, 1, 1) = -2(2, -4, 1) - (3, -1, 2) + (0, 2, -1) = (-7, 11, -5)$ och slutligen kan vi skriva upp A som

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -4 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Uppgift 7 (5 poäng)

Låt $U = \{p(x) \in P_2 \,|\, \int_0^3 p(x)dx = 3p(1)\}$ (dvs låt U vara mängden av alla polynom $p(x)$ i P_2 som uppfyller integralvillkoret $\int_0^3 p(x)dx = 3p(1)$).

a) Visa att U är ett underrum av P_2, vektorrummet av alla polynom av grad mindre eller lika med 2.

b) Bestäm dimensionen av U. Bestäm en bas för U.

Lösning:

a) Sluten under addition: $\int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 g(x)dx = 3f(1) + 3g(1) \rightarrow \int_0^3 h(x)dx = 3h(1) \in U, h(x) = f(x) + g(x)$

Sluten under skalärmultiplikation: $k \int_0^3 f(x)dx = k3f(1) \rightarrow \int_0^3 h(x)dx = 3h(1) \in U, h(x) = kf(x)$.

b) Bas för U: $\int_0^3 a + bx + cx^2 dx = 3(a+b+c) \rightarrow 3a + \frac{9b}{2} + \frac{27c}{3} = 3(a+b+c) \rightarrow b = -4c$. Det generella polynomet i U kan då skrivas som $p(x) = a + c(x^2 - 4x)$ och basen blir $1, x^2 - 4x$ och har dimension 2.

Uppgift 8 (5 poäng)

a) Antag att de två $n \times n$-matriserna A och B är similära. Visa att även A^k och B^k är similära. Två matriser är similära om det finns en inverterbar matris P sådan att $B = P^{-1}AP$.

b) Antag att $\mathbf{u}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ sådan att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. Låt $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ och $Q = I_n - 2P$. Visa att $Q^2 = I_n$ där I_n är identitetsmatrisen av storlek $n \times n$.

Lösning:

a) För similära matriser gäller att det finns en inverterbar matris P sådan att $B = P^{-1}AP$. Detta ger att $B^k = (P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$. Dvs A^k och B^k är similära matriser.

b) $Q^2 = (I_n - 2P)^2 = I_n - 2PI_n - 2I_nP + 4P^2 = I_n - 4P + 4P^2$.

$P^2 = (\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{u}\mathbf{u}^T = P$.

$I_n - 4P + 4P^2 = I_n - 4P + 4P = I_n$