DN1230 Tillämpad linjär algebra
Tentamen
Måndagen den 10 december 2012

Skrivtid: 14-19

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Anna-Karin Tornberg

Betygsgränser:

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Poäng	34	30	26	21	18	17

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Lycka till!

Uppgift 1 (5 poäng)

a) Låt $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Ange vad som måste gälla för att $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ ska vara linjärt oberoende.

b) Låt A vara en $m \times n$ matris, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Vad krävs för att systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skall vara konsistent?

c) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär transformation. Är informationen $T(1,0,0) = (0,1,1)$, $T(0,1,0) = (2,0,1)$ och $T(2,1,0) = (2,2,3)$ tillräcklig för att bestämma $T(a,b,c)$ för godtyckliga skalärer a,b,c? Varför eller varför inte?

d) Låt A vara en matris av storlek 28×37. Vilken är den största rangen ($rank(A)$) matrisen kan ha ? Vilken är den minsta dimension matrisen A's nollrum kan ha?

Svar: $rank(A) = min(m,n) = 28$. Dimensionen på nollrummet ges av $n - min(m,n) = 37 - 28 = 9$

e) Låt U vara ett underrum av $\mathbb{R}^n$, med en bas $\mathsf{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Definiera projektionen av $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ på U.

Uppgift 2 (5 poäng)

Betrakta punkten $Q = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ samt linjen L_1 som ges av

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 2t. \end{aligned}$$

a) Bestäm planet P genom punkten Q som är vinkelrät mot linjen, L_1.

b) Bestäm det kortaste avståndet från planet P till origo genom att till exempel projicera en vektor från origo till en punkt i planet på normalvektorn till planet.

c) Visa att linjen L_2 som ges av

$$\begin{aligned} x &= 4t \\ y &= 2t \\ z &= -t \end{aligned}$$

är parallell med planet P och bestäm om linjen ligger ovanför eller under planet.

Lösning a): Normalvektorn $\mathbf{n}$ till planet ska vara parallell med riktningsvektorn till linjen, d v s $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$. Ekvationen för planet blir då $x - y + 2z = K$. Planen går genom $P = (1, 1, 1)$ om $1 - 1 + 2 = K$. Dvs $K = 2$.

Lösning b): Projektionen av exempelvis $(1, 1, 1)$ på normalvektorn $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ ges av

$$\text{proj}_{\mathbf{n}}(1, 1, 1) = \frac{(1, 1, 1) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{6}(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)(1, -1, 2)\frac{1}{3}(1, -1, 2)$$

och avståndet blir $\frac{1}{3}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Lösning c): Planets normal ges av $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ och linjens riktning av $\mathbf{t} = (4, 2, -1)$. Linjen är parallell till planet om $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Linjen går genom origo och planet går genom $z = 1$. Dvs linjen ligger under planet.

Uppgift 3 (5 poäng)

Låt $U = \text{Span}\{(1, 2, 0, 1), (2, 1, 0, 2)\}$, ett underrum av $\mathbb{R}^4$.

a) Bestäm en ortogonal bas för U.

b) Definiera det ortogonala komplementet $(U^{\perp})$ of U. Bestäm en ortogonal bas för $U^{\perp}$.

Lösning a): Låt $\mathbf{v}_1 = (1,2,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,0,2)$ och tag $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Beräkna

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = (2,1,0,2) - \frac{2+2+2}{6}(1,2,0,1) = (1,-1,0,1).$$

En ortogonal bas för U är $\{\mathbf{u}_1 = (1,2,0,1), \mathbf{u}_2 = (1,-1,0,1)\}$.

Lösning b): $U^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \forall \mathbf{u} \in U\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \text{ och } \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 0\}$, där $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är basvektorerna för U definierade ovan. Sagt i ord, så är det ortogonala komplementet till U det underrum av $\mathbb{R}^4$ innehållande alla vektorer i $\mathbb{R}^4$ som är ortogonala mot alla vektorer i U, vilket de är om de är ortogonala mot basvektorerna för U.

Utnyttja det faktum att nollrummet till en matris är det ortogonala komplementet till radrummet av matrisen. Låt $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ utgöra rader i en matris A, och lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gauss elimination ger $x_1 = -x_4$, $x_2 = 0$, x_3, x_4 fria. Dvs lösningen är på formen $(-x_4, 0, x_3, x_4) = x_3(0,0,1,0) - x_4(1,0,0,-1)$, och nollrummet är Span$\{(0,0,1,0),(1,0,0,-1)\}$. Då dessa två vektorer redan är ortogonala så utgör de en bas för nollrummet för matrisen, dvs för $U^\perp$.

Lösning b), alt 2: Låt $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ vara som ovan. Välj $\mathbf{v}_3$ utanför Span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, dvs en vektor som inte är en linjär kombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. Tex, välj $\mathbf{v}_3 = (0,0,1,0)$. Denna vektor är redan ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, om den inte var det så ska den ortogonaliseras. Sätt $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$.

Välj nu $\mathbf{v}_4$ utanför Span$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, tex $\mathbf{v}_4 = (0,0,0,1)$. Ortogonalisera,

$$\tilde{\mathbf{u}_4} = \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3.$$

Detta ger $\tilde{\mathbf{u}_4} = (-1/2, 0, 0, 1/2)$. Vi kan förstås skala vektorn som vi vill, och sätter $\mathbf{u}_4 = (1,0,0,-1)$. Vektorerna $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_4$ utgör en bas för $U^\perp$, vilket är samma vektorer som i första lösningsalternativet.

Uppgift 4 (5 poäng)

Låt $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) För vilket värde/vilka värden på k är A diagonaliserbar?

b) För vilket värde/vilka värden på k är A inverterbar?

Lösning a): Börja med att bestämma egenvärdena till A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 9 \\ k & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1+\lambda)^2-9)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2) = -(\lambda-2)^2(\lambda+4).$$

Dvs vi har ett enkelt egenvärde $\lambda = -4$, och ett dubbelt $\lambda = 2$. Vi måste kontrollera dimensionen på egenrummet tillhörande $\lambda = 2$.

$$(A-2I)\mathbf{v} = 0 \to \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

För $k = 0$ har vi endast en nollskild ekvation, och alltså två fria variabler. Dimensionen på egenrummet kommer att vara 2. Annars har vi två ekvationer, en fri variabel, och ett egenrum med dimension 1.

Endast för $k = 0$ har vi $\dim(E_\lambda) = 2$, dvs A är diagonaliserbar endast för $k = 0$.

Lösning b): Determinanten av A kan räknas ut som produkten av egenvärdena, eller direkt om man inte gjort a). Vi får $\det A = -16 \neq 0$, oberoende av k, så A är inverterbar för alla värden av k.

Uppgift 5 (5 poäng)

En linje $y = a + bx$ skall anpassas till följande punkter $(1, 1), (2, 2)$ och $(3, 2)$.

a) Bestäm konstanterna a och b med minsta kvadratmetoden.

b) Förklara vad som menas med att lösningen är bäst i minsta kvadratmening.

c) Beräkna minsta kvadratfelet.

Lösning a): Modellen ger systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Minsta kvadratlösningen ges som lösningen till normalekvationerna $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Med

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

får vi lösningen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

och modellen blir $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x$

Lösning b): Lösningen är bäst i den mening att minsta kvadratfelet $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ har minimerats (alt. $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|^2$).

Lösning c): Minsta kvadratfelet blir

$$\sqrt{(\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

alternativt

$$(\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6}$$

Uppgift 6 (5 poäng)

Följande linjära transformation, $\mathbf{u} \xrightarrow{T} \mathbf{w}$, från $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{R}^4$ är definierad genom ekvationerna nedan:

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ w_2 &= u_2 + u_3 + 2u_4 + 2u_5 \\ w_3 &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 + u_4 + u_5 \\ w_4 &= 2u_1 + 4u_2 + 4u_3 + 3u_4 + 3u_5. \end{aligned}$$

a) Skriv upp standardmatrisen A för transformationen.

b) Bestäm baser för transformationens nollrum (eng: kernel), $ker(A)$ och bild/värde/-rum (eng: range), $ran(A)$.

Lösning a):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Lösning b): Transformationens nollrum ges av matrisens nollrum. Dvs lös $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Lösningsmängden är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{t}{3}(5, -5, 1, -1, 3)$$

Nollrummet har dimension 1 och basen för nollrummet ges av $(5, -5, 1, -1, 3)$. Transformationens värdemängd ges av matrisens kolonnrum. Från den reducerade matrisen ser vi att de fyra första kolonnerna är linjärt oberoende vilket ger oss att en bas för kolonnrummet (transformationens värdemängd) ges av matrisen A's första fyra kolonner, $(1, 0, 1, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 4)$ och $(1, 2, 1, 3)$.

Uppgift 7 (5 poäng)

Låt $U = \{p(x) \in P_3 \,|\, p(1) = p(2) = 0\}$ (dvs låt U vara mängden av alla polynom $p(x)$ i P_3 som är noll för $x = 1$ och $x = 2$).

a) Visa att U är ett underrum av P_3, vektorrummet av alla polynom av grad mindre eller lika med 3.

b) Bestäm dimensionen av U. Bestäm en bas för U.

Lösning a): Ett generallt polynom $p(x)$ i P_3 kan skrivas på formen $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$. För $p \in U$,

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$
$$p(2) = a + 2b + 4c + 8d = 0$$

Lösning av detta system ger $a = 2c + 6d$, $b = -3c - 7d$, c, d fria variabler, vilket ger att alla $p(x)$ i U kan skrivas på formen,

$$p(x) = c(2 - 3x + x^2) + d(6 - 7x + x^3),$$

och vi har $U = \{p(x) \in P_3 \,|\, p(x) = c(2 - 3x + x^2) + d(6 - 7x + x^3), c, d \in \mathbb{R}\}$.

Låt $p_1(x) = c_1(2-3x+x^2)+d_1(6-7x+x^3)$, och $p_2(x) = c_2(2-3x+x^2)+d_2(6-7x+x^3)$.
Vi har $p_1(x) + p_2(x) = (c_1 + c_2)(2 - 3x + x^2) + (d_1 + d_2)(6 - 7x + x^3)$,
vilket fortfarande tillhör U (fortfarande samma form, och blir 0 för $x = 1$ och $x = 2$).
Låt r in $\mathbb{R}$. Vi har
$rp_1(x) = rc_1(2 - 3x + x^2) + rd_1(6 - 7x + x^3)$, vilket fortfarande tillhör U.

U är slutet under vektor addition och skalär multiplikation, så U är ett underrum till P_3.

Lösning b): $\dim(U) = 2$ (2 fria variabler). En bas för U är $B = \{2-3x+x^2, 6-7x+x^3\}$.

Alternativ lösning:

Från början, skriv $p(x) = (x-1)(x-2)(a+bx)$, och arbeta med detta istället. Ger natruligt $p(x) = a(2 - 3x + x^2) + bx(2 - 3x + x^2)$, och en bas $B = \{2 - 3x + x^2, 2x - 3x^2 + x^3\}$.

Uppgift 8 (5 poäng)

Visa med hjälp av induktion att determinanten av en övertriangulär matris ges av produkten av matrisens diagonalelement.

Lösning: Visa först att påståendet gäller för en övertriangulär 2×2 matris. Antag i nästa steg att det gäller för en $n \times n$ matris, och visa att det då också måste gälla för en $(n+1) \times (n+1)$ matris. (Det är lätt att visa eftersom determinanten för $(n+1) \times (n+1)$ matrisen kommer att vara produkten av ett diagonal element och determinanten för en övertriangulär $n \times n$ matris). Då följer det att påståendet måste vara sant för alla n.