BEGREPPSMÄSSIGA PROBLEM

Större delen av de rekommenderade uppgifterna i boken är beräkningsuppgifter. Det är emellertid även viktigt att utveckla en begreppsmässig förståelse för materialet. Syftet med denna text är att ge en indikation på vilka begreppsmässiga frågor man förväntas kunna svara på efter genomgången kurs.

1. Tillämpningar av satsen om existens och entydighet

Givet ett begynnelsevärdesproblem av typen

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = f(x, \phi(x)), \tag{1}$$

$$\phi(x_0) = y_0 \tag{2}$$

är det av intresse att veta om det finns en unik lösning (med lösningar menas här kontinuerligt deriverbara lösningar). Att så inte alltid behöver vara fallet illustreras av följande exempel (jämför med exempel 3 i avsnitt 2.4 i boken).

Exempel 1.1. Funktionerna $\phi_1(x) = 0$ och $\phi_2(x) = x^3$ är båda lösningar till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = 3\phi^{2/3}(x), \tag{3}$$

$$\phi(0) = 0. \tag{4}$$

Som kuriosa kan även nämnas att om $c \geq 0$ är en konstant och

$$\phi_{3,c}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ (x-c)^3 & x > c \end{cases}$$

så är $\phi_{3,c}$ en lösning till (3) och (4). Med andra ord finns det oändligt många lösningar till (3) och (4).

I många tillämpningar vill man kunna beräkna hur ett system utvecklar sig givet att systemet uppfyller en differentialekvation av formen (1) och givet initialdata. Ovanstående exempel illustrerar att man måste ställa vissa krav på högerledet i (1) för att detta perspektiv skall vara meningsfullt.

Det är av intresse att formulera ett kriterium som garanterar att (1) och (2) har en unik lösning. Följande smärre modifikation av Sats 2.8.1 i boken (se även Sats 2.4.2) tjänar detta syfte:

Sats 1. *Givet att f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga i en rektangel*

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\} \tag{5}$$

för några positiva tal a och b, så finns det ett positivt tal $h \leq a$ sådant att (1) och (2) har en unik lösning ϕ på intervallet $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Exempel 1.2. Betrakta ekvationen (3). I detta fall ges funktionen f av

$$f(x,y) = 3y^{2/3}.$$

Denna funktion är kontinuerlig överallt, men f är inte deriverbar med avseende på y i origo. Speciellt finns det ingen rektangel av den typ som krävs för att det skall gå att tillämpa Sats 1 på begynnelsevärdesproblemet (3) och (4).

Eftersom satsen är relativt abstrakt kan det vara av intresse att ta ett mer praktiskt perspektiv. En fråga man kan tänkas vara intresserad av i praktiken är följande:

Fråga: Givet x_0 och y_0, finns det en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h?

Svar: Om det finns en rektangel R av formen (5) (där a och b är positiva) sådan att f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga i R så är svaret ja.

Låt oss illustrera ovanstående med ett problem.

Problem 1.3. Antag att

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} e^{-x^2 + y^2}.$$

För vilka x_0 och y_0 garanterar Sats 1 att det finns en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h?

Lösning: Funktionen f är inte definierad i origo. Vi kan alltså utesluta $(x_0, y_0) = (0,0)$. Å andra sidan är f kontinuerlig och kontinuerligt deriverbar för $(x,y) \neq (0,0)$. Antag att $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Det går då att hitta en rektangel R av formen (5) (där a och b är positiva) som inte innehåller origo. Rektangeln R är då sådan att f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga i R. Alltså finns det en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h.

Svar: För alla $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Uppgift 1.4. Finn minst två lösningar till

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx}(x) &= \phi^{1/5}(x), \\ \phi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Uppgift 1.5. Antag att

$$f(x,y) = \frac{x^3}{9 - y^2}.$$

För vilka x_0 och y_0 garanterar Sats 1 att det finns en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h?

Uppgift 1.6. Antag att

$$f(x,y) = \frac{x}{1 + y^3}.$$

För vilka x_0 och y_0 garanterar Sats 1 att det finns en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h?

2. Existens och entydighet

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 2.1. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(1+t^2)\frac{d\phi}{dt}(t) &= e^{-t^2}\phi(t)+\sin(t^2),\\ \phi(1) &= 1\end{aligned}$$

har en unik lösning ϕ definierad för alla $t \in (-\infty, \infty)$.

Påstående 2.2. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t),\\ \phi(0) &= 0\end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.3. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 1, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t),\\ \phi(1) &= 0\end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.4. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 1, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t),\\ \phi(1) &= 1\end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.5. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{1/3}(t),\\ \phi(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på I.

Påstående 2.6. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^{3}(t),\\ \phi(0) &= 0\end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.7. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 1, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^3(t), \\ \phi(1) &= 0 \end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.8. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 1, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^3(t), \\ \phi(1) &= 1 \end{aligned}$$

har en unik lösning på I.

Påstående 2.9. Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= \phi^3(t), \\ \phi(0) &= 0 \end{aligned}$$

har en lösning på I.

Påstående 2.10. Om f och g är kontinuerliga funktioner på $(-\infty, \infty)$, så har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= f(t)\phi(t) + g(t), \\ \phi(1) &= 1 \end{aligned}$$

en unik lösning ϕ definierad för alla $t \in (-\infty, \infty)$.

Påstående 2.11. Låt

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y^3}.$$

Om $y_0 > 0$ garanterar Sats 1 att det finns en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h.

Påstående 2.12. Låt

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y^3}.$$

Om $y_0 < 0$ garanterar Sats 1 att det finns en unik lösning ϕ till (1) och (2) på ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ för något positivt h.

***Påstående 2.13.** Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt deriverbar funktion och x_0, y_0 är reella tal, så har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx}(x) &= f(x, \phi(x)), \\ \phi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

en unik lösning ϕ definierad för alla $x \in (-\infty, \infty)$.

Påstående 2.14. Om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är en kontinuerligt deriverbar funktion och x_0, y_0 är reella tal, så har begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx}(x) &= f(x, \phi(x)), \\ \phi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

en unik lösning ϕ definierad på ett öppet intervall I som innehåller x_0.

Påstående 2.15. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

Påstående 2.16. Det finns en lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

Påstående 2.17. Det finns en unik lösning $y(t)$ till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

definierad för alla $t \in \mathbb{R}$.

3. Terminologi

Ett viktigt första steg när man skall lösa en ekvation är att avgöra om den är av en speciell typ.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 3.1. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx + y}{x^2 + 1}$$

är separabel.

Påstående 3.2. Ekvationen

$$y \cos(xy) + x \cos(xy) y' = 0$$

är exakt.

Påstående 3.3. Ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

är en första ordningens linjär differentialekvation.

Påstående 3.4. Ekvationen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0$$

är en andra ordningens icke-linjär differentialekvation.

Påstående 3.5. Ekvationen
$$\frac{dy}{dx} = y^2$$
är en första ordningens ordinär differentialekvation.

4. Något om autonoma ekvationer

Många differentialekvationer är svåra att lösa explicit. Emellertid går det ibland att beskriva lösningarnas kvalitativa beteende utan att beräkna dem. Påståendena i detta avsnitt syftar till att illustrera detta.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 4.1. Låt ϕ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= 1 - \phi^4(t), \\ \phi(0) &= 0. \end{aligned}$$
Då gäller att
$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = -1$$
(det får betraktas som givet att lösningen är unik och existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

Påstående 4.2. Lösningen $\phi(t) = 1$ är en asymptotiskt stabil lösning till
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \phi^2(t) - \phi(t).$$

Påstående 4.3. Låt ϕ vara lösningen till begynnelsevärdesproblemet
$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= e^{\phi^2(t)} \sin(\phi(t)), \\ \phi(0) &= -\pi/2. \end{aligned}$$
Då gäller att
$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \phi(t) = -\pi$$
(det får betraktas som givet att lösningen är unik och existerar för alla $t \in \mathbb{R}$).

Påstående 4.4. Funktionen $\phi(t) = 0$ är en instabil lösning till ekvationen
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = e^{\phi^2(t)} \sin(\phi(t)).$$

***Påstående 4.5.** Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion f sådan att ekvationen
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t))$$
har en kontinuerligt deriverbar lösning ϕ, definierad på ett öppet intervall I, med egenskapen att $\phi'(t_1) > 0$ för något $t_1 \in I$ och $\phi'(t_2) < 0$ för något $t_2 \in I$.

***Påstående 4.6.** Låt f vara en kontinuerligt deriverbar funktion och ϕ vara en kontinuerligt deriverbar lösning till ekvationen
$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(\phi(t))$$
definierad på ett öppet intervall I. Om $\phi'(t_0) = 0$ för något $t_0 \in I$ så är $\phi(t) = \phi(t_0)$ för alla $t \in I$.

5. Superpositionsprincipen, etc.

En viktig egenskap hos linjära differentialekvationer är att det är lätt att konstruera nya lösningar från gamla; linjärkombinationer av lösningar till en linjär och homogen ekvation är, t. ex., också lösningar (superpositionsprincipen). Denna egenskap ligger till grund för de flesta metoder för att lösa linjära differentialekvationer, och är därför av central betydelse för teorin. Följande uppgifter och påståenden syftar till att illustrera bl. a. superpositionsprincipen.

Uppgift 5.1. Givet att ekvationen

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 2x^2$$

har de tre lösningarna $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + x^3$ och $y_3 = x^2 + x^4$, bestäm ekvationens allmänna lösning för $x > 0$.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 5.2. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där g inte är identiskt lika med noll. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är även $\phi_1 + \phi_2$ en lösning.

Påstående 5.3. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, där g inte är identiskt lika med noll. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ en lösning till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t).$$

Påstående 5.4. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och c_1, c_2 är två reella tal, så är $\phi_3 = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ en lösning till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t).$$

Påstående 5.5. Oavsett val av kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så gäller det att om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är $\phi_3 = \phi_1\phi_2$ en lösning till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t).$$

Påstående 5.6. Det finns en kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan att om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är $\phi_3 = \phi_1\phi_2$ en lösning till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t).$$

Påstående 5.7. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och om ϕ_1 inte är identiskt lika med noll, så finns det en konstant c sådan att $\phi_2 = c\phi_1$.

Påstående 5.8. Låt f och g vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Om ϕ_1 och ϕ_2 är två lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$) och c är ett reellt tal, så är även

$$\phi_3 = c(\phi_2 - \phi_1) + \phi_1$$

en lösning.

Påstående 5.9. Antag att $y_1(t) = e^{-t}$ och $y_2 = e^t$ är lösningar till ekvationen

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0, \tag{6}$$

där b och c är reella konstanter. Om y är en lösning till (6), så finns det reella konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^t.$$

Påstående 5.10. Det finns reella konstanter b och c sådana att $y_1(t) = te^{-t}$ och $y_2 = e^t$ är lösningar till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

Påstående 5.11. Om $y_1(t) = \sin t$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0,$$

där b och c är reella konstanter, så är även $y_2(t) = \cos t$ en lösning.

Påstående 5.12. Om $y_1(t) = e^{at}\sin(\alpha t)$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0,$$

där a, b, c och $\alpha \neq 0$ är reella konstanter, så är $-b^2 + 4c < 0$.

Påstående 5.13. Om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = e^t$$

så är $y = y_1 + y_2$ en lösning.

Påstående 5.14. Om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = e^t$$

så är $y = y_1 - y_2$ en lösning.

Påstående 5.15. Antag att y_1, y_2 och y_3 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = e^t \tag{7}$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. Antag vidare att $y_a = y_1 - y_2$ och $y_b = y_1 - y_3$ är sådana att vektorerna

$$\begin{pmatrix} y_a(t_0) \\ \dot{y}_a(t_0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_b(t_0) \\ \dot{y}_b(t_0) \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende för något $t_0 \in \mathbb{R}$. Givet en lösning y till (7) så finns det då konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y = c_1 y_a + c_2 y_b + y_1.$$

Påstående 5.16. Antag att y_1, y_2 och y_3 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = e^t$$

för alla $t \in \mathbb{R}$. Antag vidare att $y_a = y_1 - y_2$ och $y_b = y_1 - y_3$ är sådana att vektorerna

$$\begin{pmatrix} y_a(t_0) \\ \dot{y}_a(t_0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_b(t_0) \\ \dot{y}_b(t_0) \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende för något $t_0 \in \mathbb{R}$. Givet en lösning y till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = 0$$

så finns det då konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y = c_1 y_a + c_2 y_b.$$

Påstående 5.17. Antag att y_1 och y_2 är lösningar till

$$\ddot{y}(t) + \sin(t)\dot{y}(t) + \cos(t)y(t) = 0.$$

Om $y_1(t_0) \neq 0$ för något t_0 så finns det en konstant c sådan att $y_2 = c y_1$.

Påstående 5.18. Det finns reella konstanter b och c sådana att $y(t) = t \sin t$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

Påstående 5.19. Det finns reella konstanter b, c, α och β sådana att $y(t) = t \sin t$ är en lösning till

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \alpha \sin t + \beta \cos t.$$

Påstående 5.20. Låt p och q vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$. Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 1, \\ \dot{y}(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

och y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0, \\ y(t_0) &= 2, \\ \dot{y}(t_0) &= 1. \end{aligned}$$

Det får betraktas som givet att y_1 och y_2 är definierade på I. Då utgör y_1 och y_2 en fundamentalmängd av lösningar till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0$$

på intervallet I.

Påstående 5.21. Låt p och q vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$. Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 1,\\ \dot{y}(t_0) &= 1.\end{aligned}$$

och y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 2,\\ \dot{y}(t_0) &= 2.\end{aligned}$$

Det får betraktas som givet att y_1 och y_2 är definierade på I. Då utgör y_1 och y_2 en fundamentalmängd av lösningar till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0$$

på intervallet I.

Påstående 5.22. Låt p, q och g vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$. Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 1,\\ \dot{y}(t_0) &= 1,\end{aligned}$$

y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 2,\\ \dot{y}(t_0) &= 1\end{aligned}$$

och y_3 vara en lösning till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = g(t). \tag{8}$$

Det får betraktas som givet att y_1, y_2 och y_3 är definierade på I. Givet en lösning y till (8) på I så finns det konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_3(t).$$

Påstående 5.23. Låt p, q och g vara kontinuerliga funktioner på ett öppet intervall I och $t_0 \in I$. Låt y_1 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 1,\\ \dot{y}(t_0) &= 1,\end{aligned}$$

y_2 vara en lösning till

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) &= 0,\\ y(t_0) &= 2,\\ \dot{y}(t_0) &= 2\end{aligned}$$

och y_3 vara en lösning till

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = g(t). \tag{9}$$

Det får betraktas som givet att y_1, y_2 och y_3 är definierade på I. Givet en lösning y till (9) på I så finns det konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_3(t).$$

6. Serier och potensserielösningar

I vissa situationer är det av intresse att hitta lösningar till differentialekvationer på potensserieform, d.v.s. lösningar på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{10}$$

I detta uttryck skall x_0 och a_n, $n = 0, 1, \ldots$, uppfattas som givna konstanter och summan skall ses som en funktion av x. När man söker lösningar på potensserieform är det av central betydelse att veta att summan (10) är konvergent. Det finns olika kriterier för att avgöra detta; se boken. I slutändan är det emellertid ofta av intresse att jämföra med serier som är oberoende av x. De resulterande frågeställningarna diskuterades i envariabelanalysen. Konvergensfrågor är emellertid av stor betydelse här, och kommer att vara av ännu större betydelse i andra delen av kursen (där det gäller att avgöra om fourierserier är konvergenta och om lösningar till differentialekvationer är deriverbara etc.). Av denna anledning följer här ett antal påståenden angående konvergens av serier.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 6.1. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

är konvergent.

Påstående 6.2. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

är konvergent.

Påstående 6.3. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

är absolutkonvergent.

Påstående 6.4. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

är konvergent.

Påstående 6.5. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

är konvergent.

Påstående 6.6. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

är absolutkonvergent.

Påstående 6.7. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

är konvergent.

Påstående 6.8. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$$

är konvergent.

Påstående 6.9. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

är konvergent.

Påstående 6.10. Summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

är konvergent.

När man hanterar potensserier är det viktigt att kunna byta summationsvariabel etc. Vidare är det viktigt att kunna använda abstrakta satser för att kunna avgöra när lösningar på potensserierform är konvergenta. Följande påståenden är ägnade att öva upp dessa färdigheter.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 6.11. Följande likheter gäller för alla $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x - 1.$$

Påstående 6.12. Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^5}$$

har konvergensradie $1/5$.

Påstående 6.13. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}(1+x^2)y''(x)+\sin(x)y'(x)+\cos(x)y(x) &= 0,\\ y(0) &= 1,\\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på formen

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där potensserien har en konvergensradie $\rho \geq 1$.

Påstående 6.14. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}y''(x)+\sin(x)y'(x)+\cos(x)y(x) &= 0,\\ y(0) &= 1,\\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

har en lösning på formen

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där potensserien har en konvergensradie $\rho = 1$.

Påstående 6.15. Om funktionen y uppfyller ekvationen

$$x^2y''(x)+\alpha xy'(x)+\beta y(x)=0$$

för $x>0$, där α och β är reella konstanter, så uppfyller $\phi(t)=y(e^t)$ ekvationen

$$\ddot{\phi}(t)+(\alpha-1)\dot{\phi}(t)+\beta\phi(t)=0$$

för alla $t \in \mathbb{R}$.

Påstående 6.16. Punkten $x_0 = 1$ är en ordinär punkt till

$$(x^2+1)y''+xy'+x^2y=0.$$

Påstående 6.17. Punkten $x_0 = 1$ är en ordinär punkt till

$$(x^2-1)y''+xy'+x^2y=0.$$

Påstående 6.18. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y''+xy'+y=0.$$

Påstående 6.19. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y''+y'+y=0.$$

Påstående 6.20. Punkten $x_0 = 0$ är en reguljär singulär punkt till

$$x^2y''+x^2y'+y=0.$$

7. Laplacetransformen

Laplacetransformen är ett kraftfullt verktyg för att lösa differentialekvationer. Emellertid går det inte att Laplacetransformera alla funktioner. Följande påståenden är avsedda som en övning i förmågan att avgöra om det går att Laplacetransformera en given funktion, samt i förmågan att avgöra hur operationer på “signalsidan” är relaterade till operationer på “transformsidan”.

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 7.1. Funktionen t^2e^t är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning (exponential order).

Påstående 7.2. Funktionen e^{t^2} är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning (exponential order).

Påstående 7.3. Funktionen $e^{\sqrt{t}}$ är styckvis kontinuerlig och av exponentiell ordning (exponential order).

Påstående 7.4. Låt f och g vara godtyckliga funktioner för vilka Laplacetransformen är definierad. Om F är Laplacetransformen av f och G är Laplacetransformen av g, så är $H = FG$ Laplacetransformen av fg.

Påstående 7.5. Låt f och g vara godtyckliga funktioner för vilka Laplacetransformen är definierad. Om F är Laplacetransformen av f och G är Laplacetransformen av g, så är $H = F + G$ Laplacetransformen av $f + g$.

Påstående 7.6. Låt f vara en godtycklig funktion för vilken Laplacetransformen är definierad. Om F är Laplacetransformen av f och α är ett reellt tal, så är αF Laplacetransformen av αf.

Påstående 7.7. Låt f vara en godtycklig funktion för vilken Laplacetransformen är definierad. Låt F vara Laplacetransformen av f, u_c vara definierad av

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

där $c \geq 0$, h vara definierad av $h(t) = u_c(t)f(t)$ och H vara Laplacetransformen av h. Då är $H(s) = e^{-cs}F(s)$ oavsett vilket värde $c \geq 0$ har.

Påstående 7.8. Låt f vara en godtycklig funktion för vilken Laplacetransformen är definierad. Låt F vara Laplacetransformen av f, c vara en godtycklig konstant, $h(t) = e^{ct}f(t)$ och H vara Laplacetransformen av h. Då är $H(s) = F(s - c)$.

Påstående 7.9. Låt f vara en godtycklig funktion för vilken Laplacetransformen är definierad. Låt F vara Laplacetransformen av f,

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

och H vara Laplacetransformen av h. Då är $H(s) = sF(s)$.

Påstående 7.10. Givet två kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0, \infty)$, låt $f * g$ beteckna funktionen h definierad av

$$h(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

För en godtycklig kontinuerlig funktion f definierad på $[0, \infty)$ gäller då att $f*1 = f$.

Påstående 7.11. Givet två kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0,\infty)$, låt $f * g$ beteckna funktionen h definierad av

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

För en godtycklig kontinuerlig funktion f definierad på $[0,\infty)$ gäller då att $f*0 = 0$.

Påstående 7.12. Givet två kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0,\infty)$, låt $f * g$ beteckna funktionen h definierad av

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

För godtyckliga kontinuerliga funktioner f och g, definierade på $[0,\infty)$, gäller då att $f * g = g * f$.

8. System av differentialekvationer

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 8.1. Antag att A är en 2×2 matris sådan att

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.$$

Då ges den allmänna lösningen (general solution) till ekvationen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

av

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Påstående 8.2. Det finns en 2×2 matris A sådan att

$$\mathbf{x}_1(t) = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^t, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{-t}$$

är två lösningar till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Påstående 8.3. Om

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

är en lösning till

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

där A är en 2×2 matris, så är $\det(A) = 0$.

Påstående 8.4. Det finns en unik lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix}\sin t^2 & te^{t^2}\\ \frac{1}{1+t^2} & \cos t\end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix}t\\ t^2e^t\end{pmatrix},\\ \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

definierad för alla t.

9. Autonoma system och stabilitet

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

Påstående 9.1. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11}$$

är stabil om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att varje lösning $\mathbf{x}$ till (11) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \epsilon$$

för alla $t \geq 0$.

Påstående 9.2. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{12}$$

är stabil om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ gäller att varje lösning $\mathbf{x}$ till (12) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \epsilon$$

för alla $t \geq 0$.

Påstående 9.3. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{13}$$

är stabil om och endast om det finns ett $\epsilon > 0$ och ett $\delta > 0$ sådana att varje lösning $\mathbf{x}$ till (13) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

existerar för alla positiva t och uppfyller

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \epsilon$$

för alla $t \geq 0$.

Påstående 9.4. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{14}$$

är asymptotiskt stabil om och endast om den är stabil och det finns ett $\delta > 0$ sådant att varje lösning $\mathbf{x}$ till (14) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

även uppfyller

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}.$$

Påstående 9.5. En kritisk punkt $\mathbf{x}^{(0)}$ till systemet

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{15}$$

är asymptotiskt stabil om och endast om den är stabil och det för alla $\delta > 0$ gäller att varje lösning $\mathbf{x}$ till (15) som uppfyller

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^{(0)}\| < \delta$$

även uppfyller

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)}.$$

Påstående 9.6. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Påstående 9.7. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Påstående 9.8. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Påstående 9.9. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Påstående 9.10. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Påstående 9.11. Punkten $\mathbf{x}^{(0)} = 0$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt till

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Institutionen för matematik, KTH, 100 44 Stockholm, Sweden