

Föreläsning 2

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik
Skolan för elektro- och systemteknik

3 september 2013



Förra gången:

- Dynamiska system = Differentialekvationer
- Återkoppling

Dagens program:

- Laplacetransformen
- Blockdiagram
- PID-reglering

Tidsfunktioner: $y(t)$, $u(t)$

Laplacestransformer:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Regler:

$$\blacksquare \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = sY(s) - y(0)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}Y(s)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}\left\{\int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau\right\} = G(s)U(s) \quad \left[\text{Faltning} \right]$$

$$\blacksquare \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s), \text{ om } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \text{ existerar.} \quad \left[\text{Slutvårdessatsen} \right]$$

Exempel

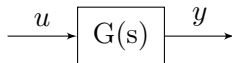
$$\begin{cases} \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\dot{u} + b_1u \\ y(0) = \dot{y}(0) = u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_2Y(s) = b_0sU(s) + b_1U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0s + b_1}{s^2 + a_1s + a_2}}_{\text{Överföringsfunktion, } G(s)} U(s)$$

Överföringsfunktion, $G(s)$

Överföringsfunktionen är länken mellan insignal och utsignal.



\Leftrightarrow

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Definition

Systemets *poler* ges av rötterna till nämnarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Exempel

$$s^2 + a_1s + a_2 = 0$$

Exempel (Inverterad pendel)

Har poler vid $s = \pm\sqrt{g/l}$.

Exempel

Karaktäristisk ekvation: $s^2 + a_1s + a_2$

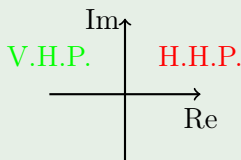
Rötter: λ_1, λ_2

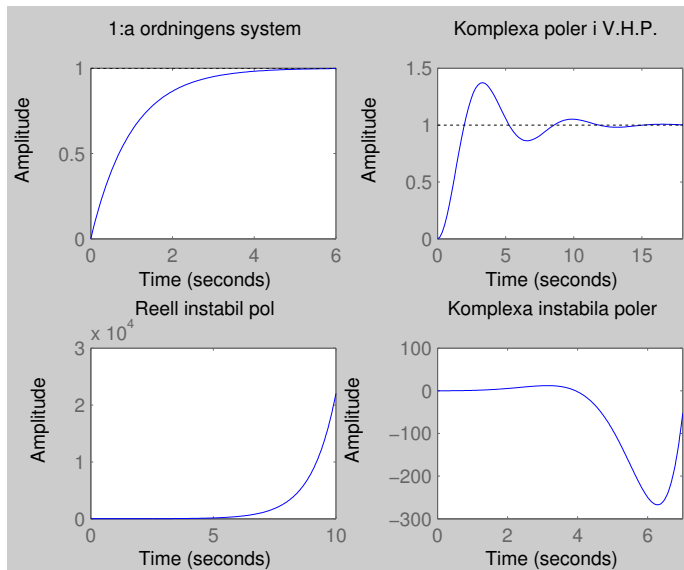
\Rightarrow Homogen lösning: $y_0(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Låt nu $\lambda = x + i\omega$, där x är realdelen och ω imaginärdelen.

$$\Rightarrow e^{\lambda t} = e^{xt} [\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \rightarrow$$

$$\begin{cases} 0, & \text{Re}[\lambda] < 0, \text{ Vänster HalvPlan, } \textit{Stabilt} \\ \infty, & \text{Re}[\lambda] > 0, \text{ Höger HalvPlan, } \textit{Instabilt} \end{cases}$$





Exempel

Bestäm utsignalen hos systemet:

$$\dot{y} + y = 20, \quad y(0) = 0$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0) + Y(s) &= \frac{20}{s} \\ \implies Y(s) &= 20 \frac{1}{s} \frac{1}{s+1} = 20 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] \\ \implies y(t) &= 20 [1 - e^{-t}] \rightarrow 20, \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pol i -1 i V.H.P., dvs stabilt

Definition

Systemets *nollställen* ges av rötterna till täljarpolynomet hos överföringsfunktionen.

Exempel

$$b_0s + b_1 = 0$$

Nollställe i H.H.P. $\implies \frac{1}{G(s)}$ är instabilt \implies Svårt reglerproblem.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\text{Faltning: } \implies y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau) d\tau$$

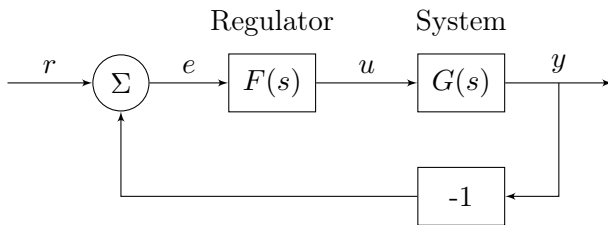
Integralen är en viktad ”summa” av gamla ($0 \leq \tau \leq t$) insignaler (dynamik).

Funktionen $g(t)$ kallas *impulssvaret*.

Exempel (Integrator)

$$g(\tau) = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{s}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = G(s)F(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = GFR - GFY$$

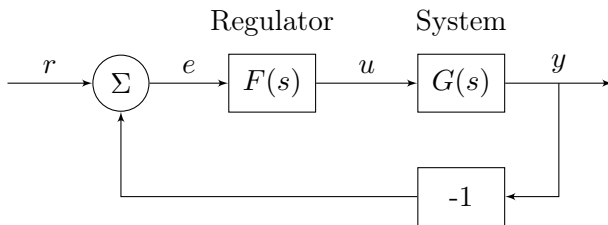
$$\Rightarrow [1 + GF]Y = GFR$$

$$[1 + GF]Y = GFR$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto y(t)$.

$$\implies Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{\underbrace{1 + G(s)F(s)}_{G_c(s)}} R(s)$$

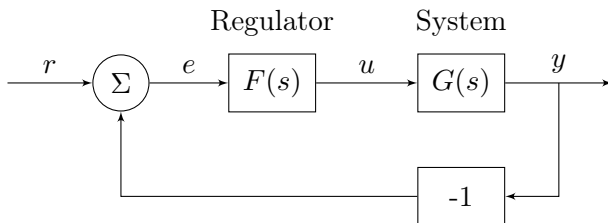
$G_c(s)$ kallas det *återkopplade (closed loop) systemets överföringsfunktion*.



$$Y(s) = G(s)F(s)E(s)$$

Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto e(t)$.

$$\implies E(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$



$$U(s) = F(s)E(s)$$

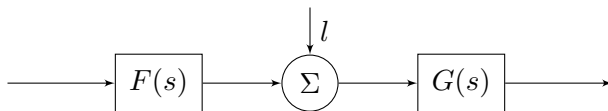
Härifrån får vi ett samband för hur $r(t) \mapsto u(t)$.

$$\implies U(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s)$$

Vi kan även få ut ett uttryck som innehåller

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

Detta berör en insignalsstörning ($l(t) \mapsto y(t)$), som vi kommer se senare i kursen.



Observera att alla dessa uttryck innehåller $1 + G(s)F(s)$, dvs.
 $1 + \underbrace{\text{kretsförstärkningen}}_{G(s)F(s)}$ i nämnaren,

\implies

Slutna systemets poler ges av

$$1 + G(s)F(s) = 0.$$

Bestämmer stabilitet för det återkopplade systemet!

PID-reglering

PID (Proportionell Integrerande Deriverande) reglering löser större delen av alla reglerproblem.

Exempel

En processindustri har över 1000 PID-regulatorer.



Definition (PID-Regulatorn)

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

alt.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Den har tre stycken "rattar" vi kan finjustera.

- **Propotionell återkoppling:** $Ke(t)$ betraktar felet just nu
- **Integrerande återkoppling:** $\frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$ betraktar hur felet *har* uppfört sig
- **Deriverande återkoppling:** $T_D \frac{de(t)}{dt}$ betraktar hur felet *kommer* att uppföra sig

Hur ska man ställa in K , T_I och T_D ?

⇒ LAB 1!

Exempel (Temperaturreglering)

$$\begin{cases} y(t) & : \text{temp. inne} \\ u(t) & : \text{el-effekt} \\ v(t) & : \text{temp. ute} \end{cases} \implies \dot{y} + \alpha y = u + \alpha v$$

Mål: Att ha $r(t)$ grader inne.

Strategi:

Öka $u(t)$ ifall det är för kallt inne.

Sänk $u(t)$ ifall det är för varmt inne.

Hur mycket?

P-regulator: $u(t) = K[r(t) - y(t)]$, $K > 0$.

Exempel (Temperaturreglering, P-regulering)

$$\Rightarrow \dot{y} + (\alpha + K)y = Kr + \alpha v$$

Antag att $r(t) = \bar{r}$ och $v(t) = \bar{v}$ (konstanter).

$$\Rightarrow y(t) \xrightarrow{e^{-(\alpha+K)t}} \frac{K}{\alpha+K}\bar{r} + \frac{\alpha}{\alpha+K}\bar{v}, t \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow y(t \rightarrow \infty) \approx \bar{r}$ om K är stor.

Stationärt fel: $u = Ke > 0$ krävs för att hålla rätt temperatur.

Kommentar:

Stationärt = när det har svängt in sig"

Transient = medan det svänger in sig"

PI-reglering

$$\text{PI-regulator: } u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$$

Vi har vid ett stationärt tillstånd att $e(t) = 0$, annars ökar eller minskar $u(t)$ pga av integralen.

Insvängning: Antag att $u = \bar{u}$ krävs för $e(t) = 0$. Studera

$$\bar{u} = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$$

Deriverar vi detta uttryck får vi

$$\begin{aligned} K \left[\dot{e} + \frac{1}{T_I} e \right] &= 0 \\ \Rightarrow e(t) &= C \cdot e^{-t/T_I} \end{aligned}$$

Om T_I är liten får vi en snabbare insvängning mot referensvärdet.
(*Försämrar stabilitet!*)

Antag att vi har en högsta tillåten styrsignal u_{\max} , dvs. $u(t) \leq u_{\max}$.
Om vi använder en PID-regulator och uppnår

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right] > u_{\max}$$

Exempel (Bil med husvagn i uppförsbacke!)

Integraldelen växer ($e(t) > 0$) trots att man inte kan ställa ut mer. När man väl har nått $e(t) = 0$, måste man ha ett negativt fel ($e(t) < 0$) så att integraldelen minskar till rätt värde.

Man löser detta genom att bara integrera när felet är litet (*anti-windup*).

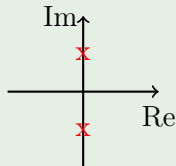
- JAS 39 Gripen, 1993, Långholmen (YouTube)
- JAS 39 Gripen, 1989, Pilot Induced Oscillation. Piloten för snabb P-reglering" <jmfr bilkörning, cykel>

Exempel (Inverterad pendel, Segway)

Systemet har en överföringsfunktion på formen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

P-reglering: $s^2 - g/l + K$



PI-reglering: Fungerar ej

Exempel (Inverterad pendel, fort.)

PD-reglering:

Regulatorn ges av $F(s) = K[1 + T_D s]$ (hastighetsåterkoppling).

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 - g/l + K + K T_D s}$$

Systemets poler fås av

$$s^2 + K T_D s + K - g/l = 0$$

Väljer vi till exempel

$$T_D = 2/K, \quad K = 1 + g/l$$

$$\implies (s + 1)^2 = 0$$

dvs. poler i -1. OK.

D-verkan snabbar upp systemet och förbättrar stabiliteten.

Men för stort T_D ger motsatt verkan.

Gör vi en första ordningens Taylorutveckling av felet:

$$e(t + T_D) \approx e(t) + T_D \frac{d}{dt} e(t)$$

så kan vi tolka $T_D \approx$ prediktionshorisont.