

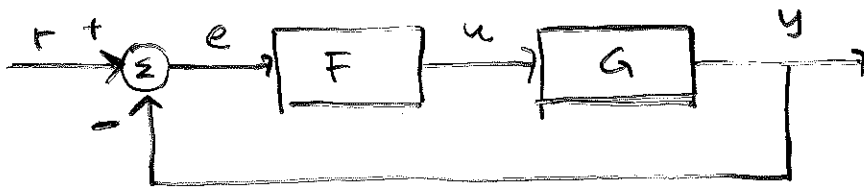
Övning 7: • Känslighet och robusthet
• Tillståndsbekrivning

Uppgifter: 6.7, 8.2, 8.3, 8.6

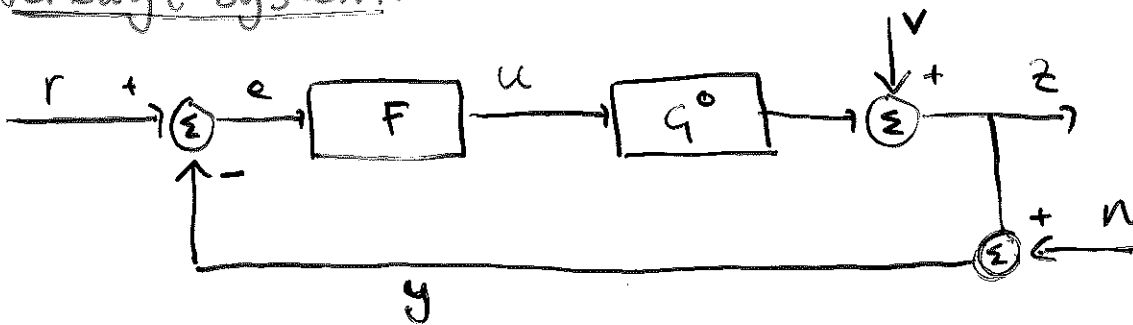
Teori del 1: Känslighet och robusthet

• Vad begränsar prestandan hos vårt system?

Vår modell:



Verkligt system:



(i) Modell fel och störsignal v

vi tror att $Y(s) = G(s)U(s)$ men i verkligheten är $Z(s) = G^0(s)U(s) + V(s)$

(ii) Mät fel n

vi mäter y , då systemets verkliga utsignal är z .
 $Y(s) = Z(s) + N(s)$

(iii) Begränsad insignal u .

Komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$. 2

• Känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1 + G(s)F(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)}$
 $v \rightarrow y$

För att minska störningens, v , inverkan på y
krävs liten $S(s) \Rightarrow$ stor $G_0(s)$.

• Komplementära känslighetsfunktionen $n \rightarrow z$
 $T(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = G_c(s)$

För att minska mätbruset, n , inverkan på z
krävs liten $T(s)$

$$S(s) + T(s) = 1$$

Robusthet

3

- Beskriver ett systems tolerans mot modellfel.

$G^\circ(s)$: verkligt system

$G(s)$: modell av system

$$G^\circ(s) = G(s) (1 + \Delta G(s))$$

$\Delta G(s)$: relativt modellfel

Robusthetskriteriet (s.125)

Givet återkoppling $F(s)$ som stabiliserar $G(s)$.

Antag $G^\circ(s)$ och $G(s)$ har samma antal poler i HHP,

samt att $\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s)G(s) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s)G^\circ(s) = 0$.

Då är det slutna systemet då $G^\circ(s)$ återkopplas med $F(s)$ stabilt om

$$|A_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

OBS! Robusthetskriteriet är ett tillräckligt men inte nödvändigt villkor för stabilitet.

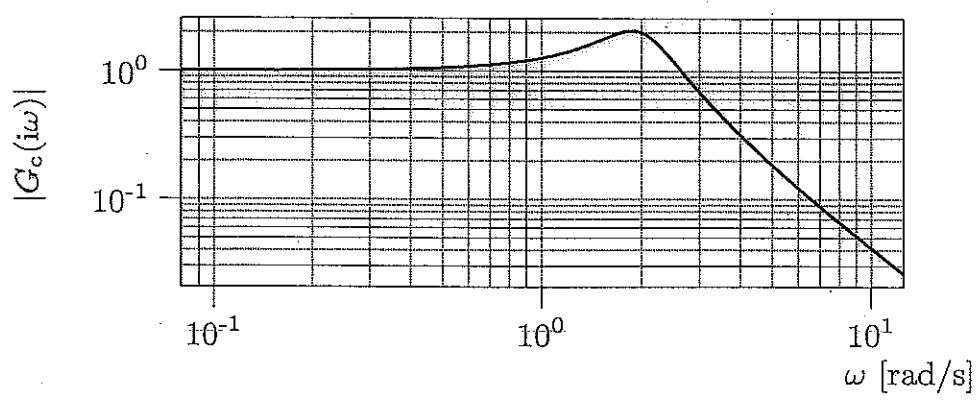


Figure 6.7a

6.7 A DC-motor is assumed to have the transfer function

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

and it is controlled using proportional feedback,

$$U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$$

where $F(s) = 4$. The amplitude curve of the feedback system

$$|G_c(i\omega)| = \left| \frac{F(i\omega)G(i\omega)}{1 + F(i\omega)G(i\omega)} \right|$$

is given in Figure 6.7a. Assume that the real system is given by

$$G^0(s) = G(s) \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha > 0$$

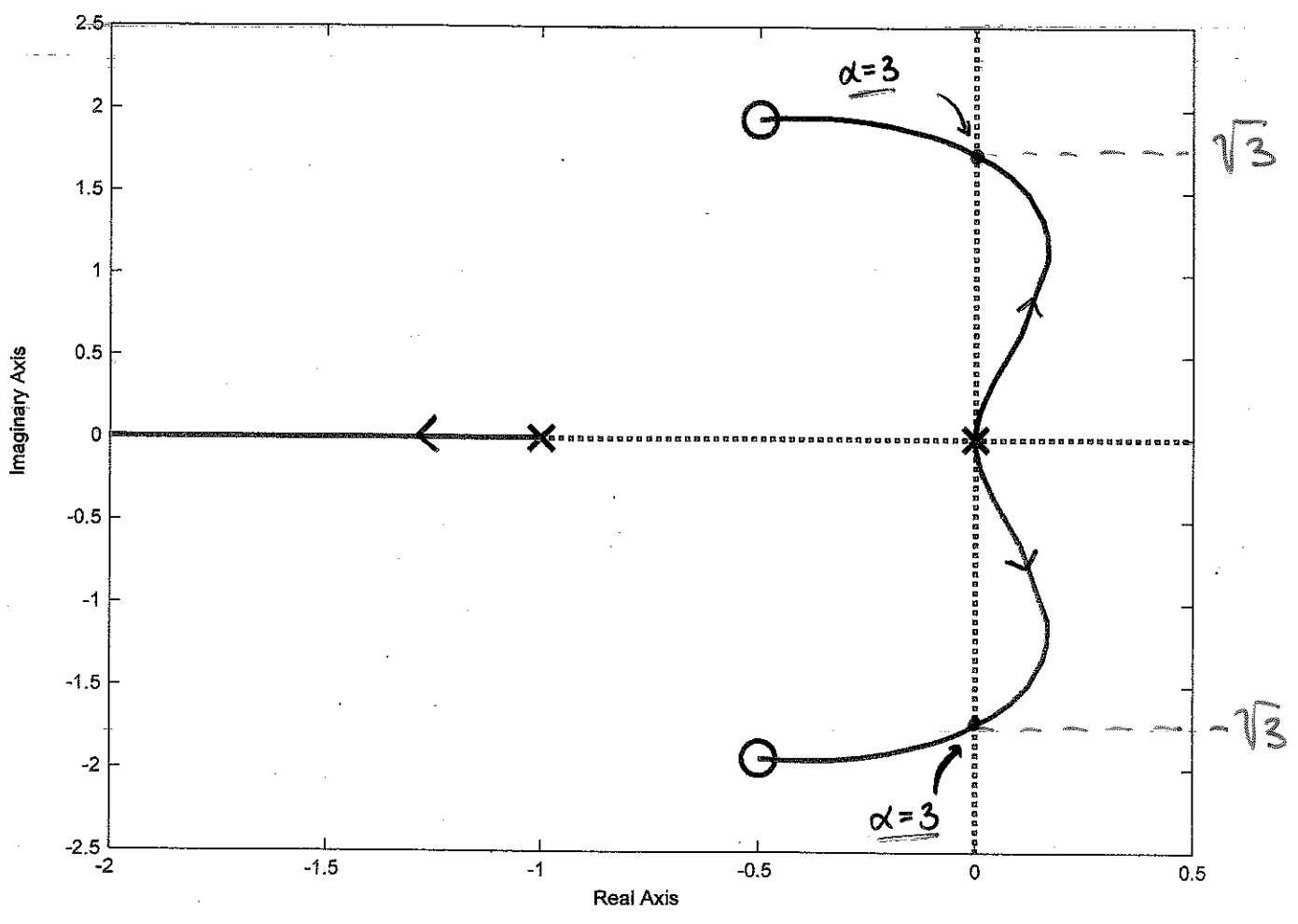
and the controller $F(s)$ is used on the system $G^0(s)$.

- (a) Draw a root locus with respect to α for the characteristic equation of the closed loop system and determine for which α the closed loop system is asymptotically stable.
- (b) Use the robustness criterion to decide for which α the closed loop system is asymptotically stable.
- (c) Comment on the possible differences in the demands on α in a) and b).

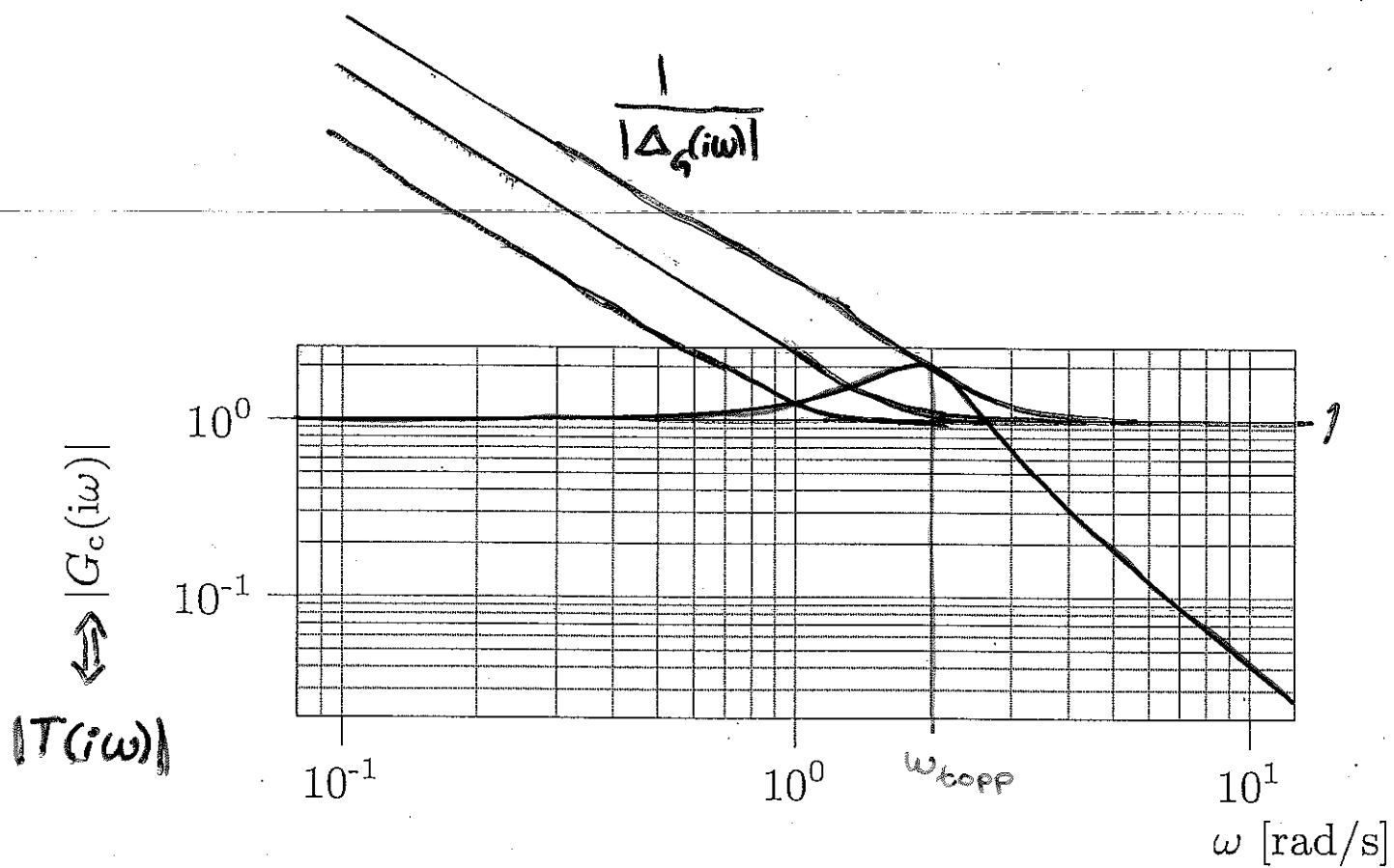
2

6.7.a

Root Locus



6.7.b



Teori del 2: Tillståndsbekrivning

- Högre ordningens linjära diff. ekvationer kan skrivas som ett system av första ordningens diff. ekvationer

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A, B, C, D: \text{matriser}$$

$y(t)$: utsignal

$u(t)$: insignal

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ systemets tillståndsvektor

- Tillståndsbekrivning \Rightarrow Överföringsfunktion

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B} \quad (\text{s. 162})$$

- Överföringsfunktion \Rightarrow Tillståndsbekrivning

Det finns oändligt många tillståndsbekrivningar för ett givet system. Två standardmetoder finns i boken: styrbar kanonisk form och observerbar kanonisk form.

- Linjärisering (s. 155)

Ett sätt att approximera olinjära funktioner med linjära kring en viss punkt. (Taylor!)

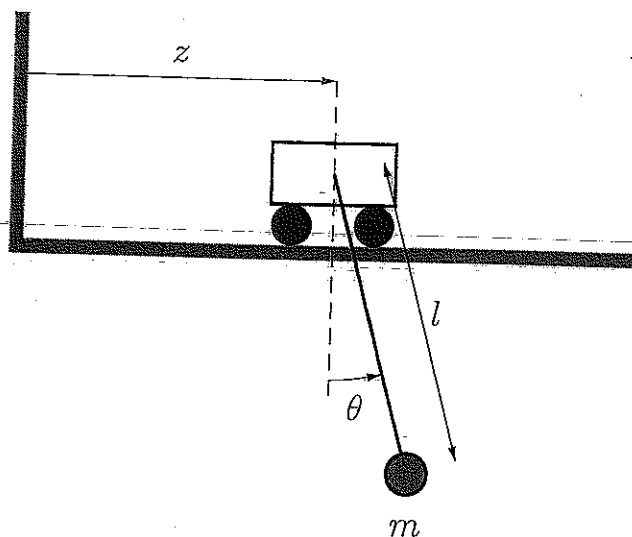


Figure 8.2a

- 8.2 Consider the system illustrated in Figure 8.2a. It consists of a hinge that can move in the direction marked "z", and a thereto attached pendulum. The system is described by the equation.

$$l\ddot{\theta} + g \sin \theta + \ddot{z} \cos \theta = 0$$

Define state space variables, input, and output as

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \dot{\theta} \quad u = \ddot{z}/l \quad y = \theta$$

and

$$\omega_0^2 = g/l$$

Linearize the system around the equilibrium point given by

$$x_1 = \pi \quad x_2 = 0 \quad u = 0$$

får vi då tillståndsformen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0) x$$

Om systemen beskrivs av olinjära differentialekvationer, kommer man med denna metodik fram till en olinjär tillståndsform

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (8.8)$$

Här är alltså f en kolonnvektor med dimensionen $n =$ dimensionen hos x . På samma sätt som i avsnitt 2.1 kan denna linjäriseras kring en så kallad stationär punkt eller jämviktpunkt x_0, u_0, y_0 , dvs en punkt där det gäller

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} f(x_0, u_0) = 0, \\ y_0 = h(x_0, u_0) \end{cases}$$

Genom att betrakta små avvikelser från x_0 och u_0

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x = x_0 + \Delta x \\ u = u_0 + \Delta u \end{cases}$$

får vi med Taylorutveckling

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Delta \dot{x} = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) \\ &\approx f(x_0, u_0) + f_x(x_0, u_0) \Delta x + f_u(x_0, u_0) \Delta u \\ \Delta y &= h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - y_0 \\ &\approx h_x(x_0, u_0) \Delta x + h_u(x_0, u_0) \Delta u \end{aligned}$$

där högregradstermer i Δx och Δu försumrats. f_x, f_u, h_x och h_u betecknar partialderivator med avseende på x och u . f_x är en $n \times n$ matris vars i, j element är

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x, u) \quad \begin{matrix} i \downarrow & j \rightarrow \\ \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \end{matrix}$$

där f_i är i :e raden i f , och motsvarande för f_u . Dessa matriser kallas jacobianerna av f . Med beteckningarna

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} A = f_x(x_0, u_0) & B = f_u(x_0, u_0) \\ C = h_x(x_0, u_0) & D = h_u(x_0, u_0) \end{cases} \quad (8.9)$$

för matriserna kan den linjäriserade ekvationen skrivas

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} \Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \\ \Delta y = C \Delta x + D \Delta u \end{cases}$$

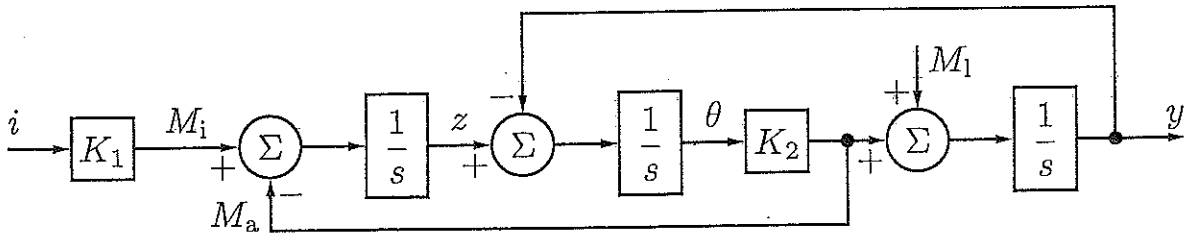


Figure 8.3a

8.3 The block diagram in Figure 8.3a describes an electric motor that drives a load via an elastic axis. Here i is the driving current to the motor, which gives the torque M_i . z is the turning rate of the motor and y is the turning rate of the load. θ is the angle of the transmission axis. $M_a = K_2\theta$ is the torque this angle causes. M_1 is the torque from the load. Give a state space description for the system with M_1 and i as inputs and y as output. (There are at least two different ways to solve this problem.)

Vi får

$$\begin{aligned} G(s) &= (2 \ 1) \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s-3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (2 \ 1) \frac{1}{s^2 - 4s + 1} \begin{pmatrix} s-3 & 2 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2s-5}{s^2-4s+1} \end{aligned}$$

Notera att nämnaren blir lika med $\det(sI - A)$. Systemets poler är alltså lika med A -matrisens egenvärden.

Allmänt gäller att inversen av en matris kan skrivas

$$H^{-1} = \frac{1}{\det H} H^*$$

där H^* är adjunktmatrisen till H . Denna element erhålls genom addition och multiplikation av element i H , på ett sätt som inte är intressant (här). Vi kan alltså skriva (8.13) som

$$G(s) = \frac{C(sI - A)^* B}{\det(sI - A)} + D \quad (8.14)$$

där $C(sI - A)^* B$ följaktligen är ett polynom i s . Om inga förkortningar sker i (8.14) är alltså $\det(sI - A)$ överföringsfunktionens nämnarpolynom och således är systemets poler lika med A -matrisens egenvärden. Vi sammanfattar diskussionen hittills:

Resultat 8.3

Överföringsfunktionen för systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

är

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (8.15)$$

Om ingen förkortning sker då detta uttryck evalueras är systemets poler lika med A -matrisens egenvärden.

8.7 Lösning av tillståndsekvationerna

Tillståndsteori, liksom boken i övrigt, handlar egentligen om egenskaper hos linjära differentialekvationer. Det är typiskt för det reglerteoretiska angreppssättet att vi analyserar systemen och bestämmer återkopplingar utan att arbeta med explicita uttryck för lösningarna till differentialekvationerna. Dessa skulle i de flesta fall vara alltför