1. Lördagen 04.06

1.1. Nu vill vi fokusera på linjära avbildningar från vektorrum W. Om $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är en linjär avbildning, och $W \subseteq \mathbf{R}^n$ ett vektorrum, då har vi en inducerad avbildning $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Och denna avbildning är linjär.

Exempel 1.2. Låt $T\colon \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ vara avbildningen

$$T(X) = T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Projektionen på första faktorerna, tredje och femte faktor Detta är en linjär avbildning. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^5$ vara vektorrummet vi betraktade i Exempel **??**. Den inducerade avbildningen $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^3$ är simpelthen

$$T(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \\ w_5 \end{bmatrix}.$$

Och vi vill gärna representera denna avbildning med en matris. Detta ges dock inte av formeln **??**, och en av anledningarna är att t.ex. e_1 inte finns med i W. Då e_1 inte är med i W kan vi inte prata om $T_{|W}(e_1)$.

1.3. Representera linjära avbildningar med matriser. Vi har den linjära avbildningen $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^3$ från Exempel **??**, och vi vill representera denna med en matris. Lösningen är att välja en bas för vektorrummet W. Vi har tidligare sätt att vektorerna

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas för W. Vi applicerar avbildningen $T = T_{|W}$ på dessa tre punkt, och har att

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kommer nu att representera varje vektor w i W med sin koordinatmatris med avseende på basen $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$. Betrakta nu matrisen

$$B = \begin{bmatrix} T(u_1) & T(u_2) & T(u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jag hävdar nu att

$$T(w) = B \cdot \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}_\beta.$$

Eller, för att vara mera specifik. Om vektorn $w = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3$, då har vi att

$$T(w) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}t_1 + \frac{2}{3}t_3 \\ t_1 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

På den andra sidan har vi att om $w = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3$, dåhar vi att

$$w = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}t_1 + \frac{2}{3}t_3 \\ -\frac{1}{2}t_1 - 2t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

och vi har att $T(w) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}t_1 + \frac{2}{3}t_3 \\ t_1 \\ t_3 \end{bmatrix}$, vilket visar vad vi hävdade.

1.4. En allmän formel. Om $T \colon W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är en linjär avbildning, och $\beta = \{w_1, \dots, w_r\}$ är en bas för W då kan vi representera avbildningen T med en matris och matrismultiplikation. Vi bildar matrisen

$$B = \begin{bmatrix} T(w_1) & \cdots & T(w_r) \end{bmatrix}$$

som är en $(n \times r)$-matris. För varje vektor w i W har vi följande samband

$$T(w) = B \cdot \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}_\beta.$$

1.5. Identifikation av vektorrum. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^m$ vara ett vektorrum, och låt $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ vara en bas för W. Vi bildar den linjära avbildningen $T \colon W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ som skickar en godtycklig vektor $w = t_1 w_1 + \cdots t_n w_n$ till

$$T(w) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

Matrisen som representerar denna linjära avbildning är identitetsmatrisen. Avbildningen T identifierar W med $\mathbf{R}^n$. Alla vektorrum med samma dimension är lika. Ett vektorrum av dimension n kan alltid identifieras med $\mathbf{R}^n$.

Exempel 1.6. Låt $L \subseteq \mathbf{R}^2$ vara linjen som ges av ekvationen $3x+4y = 0$. Med andra ord har vi att L är lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet $3x+4y=0$. Vi har att L är ett vektorrum, och att en bas ges av t.ex. vektorn $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Detta betyder att

$$L = \{ \begin{bmatrix} 4t \\ -3t \end{bmatrix} \mid \text{ tal } t \}.$$

Om vi väljer att glömma bort att L är en delmängd av planet $\mathbf{R}^2$ så är L inget annat enn den reella linjen $\mathbf{R}$. En identifikation görs vid avbildningen $T\colon L \longrightarrow \mathbf{R}$, som skickar

$$T(\begin{bmatrix} 4t \\ -3t \end{bmatrix}) = t \cdot 1.$$

Med andra ord identifierar vi basen $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ med basen 1 för de reella talen.

1.7. Det är inte så att varje linjär avbildning $T\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ identifierar W med $\mathbf{R}^n$. Vi säger att T är en isomorfi om det finns en linjär avbildning $U\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow W$ sådan att samansätningen TU och UT båda blir identitetsavbildningen. I sådana fall säger vi att T identifierar W med $\mathbf{R}^n$. Om vi väljer en bas för W, och har att matrisen A representerar avbildningen T. Då har avbildningen T en invers, om och endast om matrisen A är inverterbar.

Exempel 1.8. Betrakta nu avbildningen $T\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^3$, där W är vektorrummet i $\mathbf{R}^5$ som ges som lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet **??**. Avbildningen T var given som projektionen på första, tredje och femte faktor. Med basen $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ så vi att matrisrepresentationen blev

$$B == \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då kolumn nummer två enbart består av nollor är matrisen B inte inverterbar.

1.9. En enda mera allmän formel. Om vi tänker oss en linjär avbildning $T\colon W \longrightarrow V$ mellan två vektorrum, så kan även denna representeras med en matris och matrismultiplikation. Vi måste dock välja en bas $\beta = \{w_1, \dots, w_r\}$ för W, och en bas $\gamma = \{v_1, \dots, v_s\}$ för V. Konstruera matrisen

$$B = \begin{bmatrix} [T(w_1)]_\gamma & \cdots & [T(w_r)]_\gamma \end{bmatrix}.$$

Matrisen B består av r kolumner. För att bestämma kolumn 1, tar vi och applicerar avbildningen T på vektorn w_1, detta ger $T(w_1)$. Därefter tar vi och bestämmer koordinatmatrisen till $T(w_1)$ i basen γ, detta symboliseras med $\left[T(w_1)\right]_\gamma$. Detta är kolumn ett i matrisen B. För varje vektor w i W har vi att

$$\left[T(w)\right]_\gamma = B \left[w\right]_\beta .$$

1.10. Fundamentalsats. Låt $T\colon W \longrightarrow V$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum W och V. *Kärnan* till avbildningen T är alla w i W sådan att $T(w) = 0$. Kärnan är ett vektorrum. Om man representerar avbildningen T med en matris A då vill kärnan till avbildningen T vara nollrummet till matrisen A. *Bildrummet* till avbildningen $T\colon W \longrightarrow V$ är alla vektorer v i V på formen $v = T(w)$, för någon vektor w i W. Bildrummet är ett vektorrum. Och om matrisen A representerar avbildningen T då vill bildrummet vara given som kolumnrummet till matrisen A.

Följande är ett fundamentalt resultat. Om $T\colon W \longrightarrow V$ är en linjär avbildning då har vi att

$$\dim(W) = \dim(\text{Kärna(T)}) + \dim(\text{Bild(T)}).$$

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`