

# Föreläsning 5

## Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för reglerteknik  
Skolan för elektro- och systemteknik

17 september, 2013



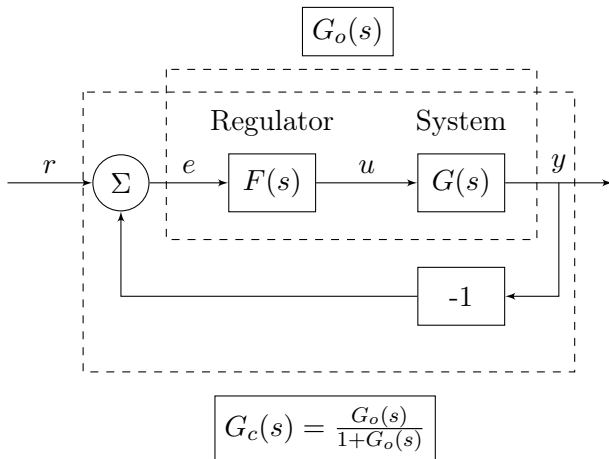
Förra gången:

- Frekvenssvar
- Bodediagram

Dagens program:

- Regulatorkonstruktion

# Regulatoronstruktion



Hur används  $G_o(i\omega)$  för att bedöma egenskaper hos  $G_c(s)$ ?

- Stabilitet
- Snabbhet och svängighet
- Stationära fel

## Stabilitet: Nyquistkriteriet

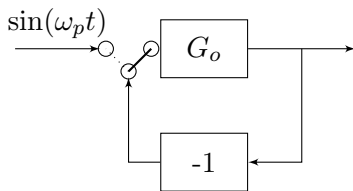
Antag att  $G_o(s)$  är stabil  $\implies$

$G_c(s)$  stabil om Nyquistkurvan till  $G(s)$  **ej** omsluter  $-1$ .

# Intuitiv frekvenstolkning

Antag  $u(t) = \sin(\omega_p t)$ .

$$\implies y(t) = |G_o(i\omega_p)| \sin[\omega_p t - \pi] = -|G_o(i\omega_p)| \sin(\omega_p t)$$



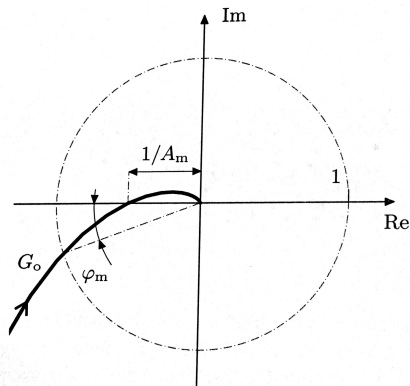
Svaret blir  $y(t) = |G_o(i\omega)|^k \cdot \sin(\omega_p t)$  med  $k \rightarrow \infty$ .

Om  $|G_o(i\omega_p)| > 1$  exploderar systemet!

Vi kommer använda följande storheter ofta.

- *Skärffrekvensen* (Crossover frequency,  $\omega_c$ ) ges av att  $|G_o(i\omega_c)| = 1$ .
- *Phase-crossover frequency* ( $\omega_p$ ) ges av att  $\arg [G_o(i\omega_p)] = -180^\circ$ .
- *Fasmarginalen* ( $\varphi_m$ ) ges av  $\varphi_m = \arg [G_o(i\omega_c)] - (-180^\circ)$ .
- *Amplitudmarginalen* ( $A_m$ ) ges av att  $A_m = \frac{1}{|G_o(i\omega_p)|}$ .

Dessa kan enkelt tolkas grafiskt i ett Nyquistdiagram.



För *snälla system* har man ett stabilitetskrav att

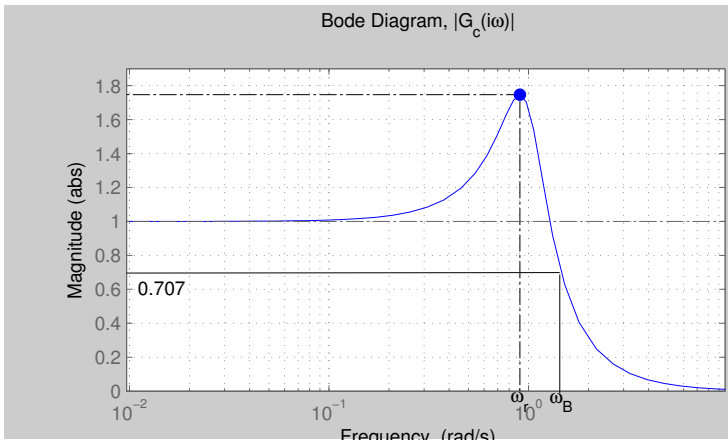
$$\begin{cases} \varphi_m > 0 \\ A_m > 1 \end{cases}$$



# Snabbhet och svängighet

$$G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)}$$

Typiskt utseende på  $|G_c(i\omega)|$ :



Från bilden på förra sidan har vi storheterna:

- **Bandbredd:**  $\omega_B \approx$  snabbhet (jämför  $T_r$ )
- **Resonansfrekvens:**  $\omega_r$
- **Resonanstopp:**  $M_p \approx$  översläng
- **Stationärt fel:**  $e_0 = 1 - G_c(0)$

Man önskar sig att

$$\begin{cases} \omega_B & \text{stor} \\ M_p & \text{liten} \\ e_0 & = 0 \end{cases}$$

Koppling mellan kretsförstärkningen  $G_o(i\omega)$  och slutna systemet  $G_c(i\omega)$ :

$$G_c(i\omega) = \frac{G_o(i\omega)}{1 + G_o(i\omega)} \iff G_o(i\omega) = \frac{G_c(i\omega)}{1 - G_c(i\omega)}$$

Vi ser att om

$$G_c(i\omega) \approx 1 \iff G_o(i\omega) \text{ stor}$$

$$G_c(i\omega) \text{ liten} \iff G_o(i\omega) \text{ liten}$$

**Tumregel:**

$$\omega_B \approx \omega_c$$

Om fasmarginalen  $\varphi_m$  är liten ( $A_m$  nära 1)

$$\implies G_c(i\omega_c) \approx \frac{-1}{1-1}$$

$\implies M_p$  stor  $\implies$  stor översläng

Krav på snabbhet och dämpning ger krav på  $\omega_c$ ,  $\varphi_m$  och  $A_m$ .

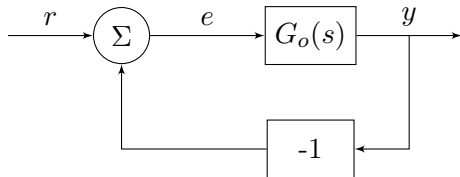
*Sammanfattning:* Det är *enklare* att göra regulatorkonstruktion genom att modifiera kretsförstärkningen

$$G_o = FG$$

än på det slutna systemet

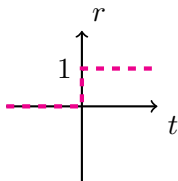
$$G_c = \frac{FG}{1 + FG}$$

# Stationära fel



$$E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)} R(s)$$

Låt  $r(t)$  vara ett enhetssteg.



Då är  $R(s) = \frac{1}{s}$ .

Använder vi *slutvärdesteoremet* (Obs. att vi måste ha ett stabilt system!)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{1 + G_o(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + G_o(0)}$$

ser vi att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ om } G_o(0) = \infty$$

dvs. att det stationära felet är noll om  $G_o(s)$  innehåller minst en integrator.

Bestäm regulator  $F(s)$  utifrån krav på

- I. snabbhet  $\Rightarrow$  Krav på  $\omega_c$
- II. dämpning  $\Rightarrow$  Krav på  $\varphi_m$
- III. stationärt fel  $\Rightarrow$  Krav på  $|G_o(0)|$



## I. Snabbhet

Det räcker med en P-regulator

$$F(s) = K$$

Detta flyttar amplitudkurvan (uppåt eller nedåt), men ändrar ej faskurvan.

## II. Dämpning

Använd en PD-regulator ( $\beta = 0$ ) formulerad med hjälp av en *lead-länk*:

$$F_{\text{lead}}(s) = \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1}$$

## III. Stationärt fel

Använd en PI-regulator ( $\gamma = 0$ ) formulerad med hjälp av en *lag-länk*:

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

## I + II + III. Sammantagen regulator

Den fullständiga regulatorn ges av:

$$F(s) = K \cdot F_{\text{lead}}(s) \cdot F_{\text{lag}}(s) = K \cdot \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \cdot \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

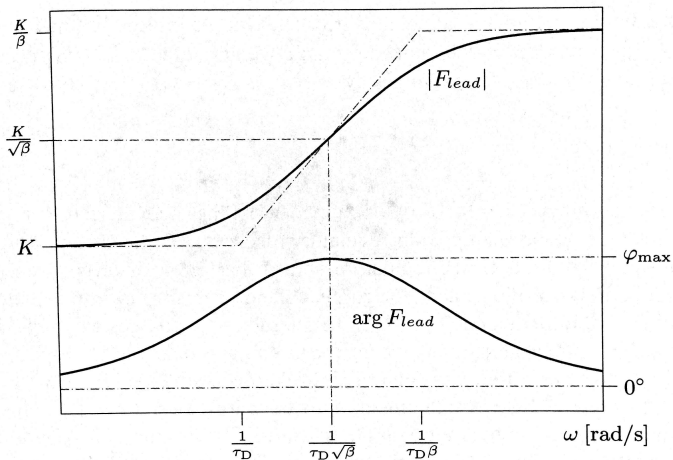
Hur ska vi bestämma  $\tau_D$ ,  $\tau_I$ ,  $\beta$ ,  $K$  och  $\gamma$ ?

Några observationer:

- $\arg [F_{\text{lead}}(i\omega)] > 0^\circ \quad \forall \omega$  lyfter fasen  $\Rightarrow$  Bättre  $\varphi_m$ .
- $\arg [F_{\text{lead}}(i\omega)]$  maximal för  $\omega = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}}$  med maxvärde  $\arctan \left[ \frac{1}{2} \frac{1-\beta}{\sqrt{\beta}} \right]$  som går mot  $90^\circ$  när  $\beta \rightarrow 0$ .
- $|F_{\text{lead}}(i \frac{1}{\tau_D \beta})| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$
- $|F_{\text{lead}}(i\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega \text{ liten} \\ \frac{1}{\beta} & \omega \text{ stor} \end{cases}$

Se figur 5.14 på sida 107.

# Lead



## Arbetsgång

- 1 Bestäm önskad  $\omega_B \rightarrow \omega_c$
- 2 Bestäm önskad  $\varphi_m \xrightarrow{(45^\circ - 60^\circ)}$  Nödvändig fasökning vid  $\omega_c$
- 3 Bestäm  $\beta$  från diagram (eller räkna ut)
- 4  $\omega_c = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}} \Rightarrow \tau_D = \frac{1}{\sqrt{\beta} \cdot \omega_c}$
- 5 Välj  $K$  så att  $|G(i\omega_c)| \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot K = 1$ , dvs.  $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|}$

**OBS.** Behövs en stor fasökning; använd flera länkar i serie.

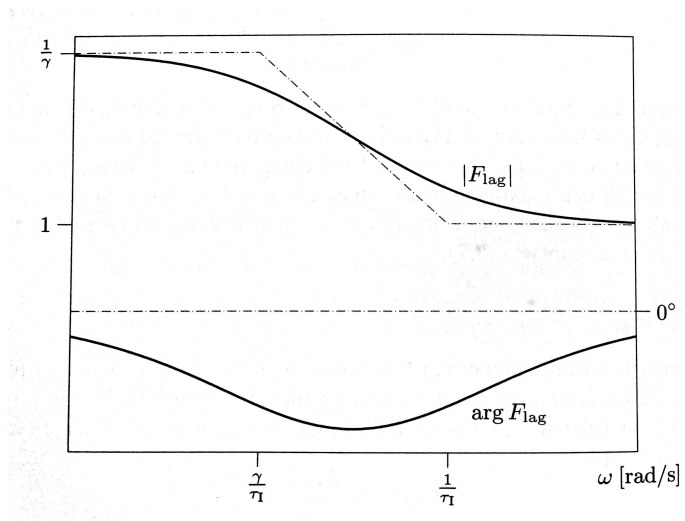
## III. PI / lag-länk

$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

- $F_{\text{lag}}(0) = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma$  liten  $\Rightarrow |G_o(0)|$  stor  $\Rightarrow$  små stationära fel
- $\arg F_{\text{lag}}(i\omega) < 0 \quad \forall \omega$  försämrar  $\varphi_m$

Se figur 5.15 på sida 108 i boken.





## Arbetsgång för PI/lag-länk

- Specificera  $e_0 \Rightarrow$  Beräkna  $\gamma$
- Försök med  $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} \Rightarrow \arg F_{\text{lag}}(i\omega_c) \geq 5.7^\circ$  dvs. liten påverkan på  $\varphi_m$ . Lägg till extra  $5.7^\circ$  med hjälp av  $F_{\text{lead}}$
- Om felet avtar för långsamt  $\Rightarrow$  minska  $\tau_I$  och kompensera eventuell försämring av  $\varphi_m$  med  $F_{\text{lead}}$