

Kontrollskrivning 1 SF1661 Perspektiv på Matematik

Tisdagen 11 september 2012, 13.15 – 14.30

SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är SANT, FALSKT eller om påståendet är en OBEVISAD HYPOTES. På denna uppgift behöver du endast lämna svar. Svar kan lämnas på detta blad.

- (1) Det finns oändligt många primtal. SANT
 - (2) Det finns oändligt många primtal p sådana att talet $(p + 2)$ också är ett primtal. OBEVISAD HYPOTES
 - (3) Alla jämna tal större än 2 kan skrivas som en summa av två primtal. OBEVISAD HYPOTES
 - (4) Mängden av alla rationella tal är uppräknligt oändlig. SANT
 - (5) Mängden av alla reella tal är uppräknligt oändlig. FALSKT
 - (6) Produkten av två rationella tal är alltid ett rationellt tal. SANT
 - (7) Produkten av två irrationella tal är alltid ett irrationellt tal. FALSKT
 - (8) $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal. FALSKT
-

2. Bestäm alla reella lösningar till följande ekvationer.

a) $|x - 125| = 2x + 35$ (2 p) b) $(2^4)^x \cdot (4^x)^{1/2} = \sqrt{2^{30}}$ (2 p)

2a) Vi delar upp lösningen i två fall, då $x \geq 125$ respektive $x < 125$.
Om $x \geq 125$ gäller att $|x - 125| = x - 125$ så därför gäller att

$$|x - 125| = 2x + 35 \iff x - 125 = 2x + 35 \iff x = -160.$$

Eftersom $-160 < 125$ finns inga lösningar på intervallet $x \geq 125$.

Om $x < 125$ gäller att $|x - 125| = -(x - 125) = 125 - x$ så därför gäller att

$$|x - 125| = 2x + 35 \iff 125 - x = 2x + 35 \iff 3x = 90 \iff x = 30.$$

Eftersom $30 < 125$ är $x = 30$ verkligen en lösning till den givna ekvationen.

2 b)

Vi förenklar ekvationen genom att använda potenslagarna,

$$\begin{aligned} (2^4)^x \cdot (4^x)^{1/2} &= \sqrt{2^{30}} \\ \iff 2^{4x} \cdot 2^{2x \cdot 1/2} &= 2^{30 \cdot 1/2} \iff 2^{4x} \cdot 2^x = 2^{15} \\ \iff 2^{5x} &= 2^{15} \iff 5x = 15 \iff x = 3 \end{aligned}$$

SVAR: a) $x = 30$ b) $x = 3$ **3.** Det komplexa talet z ges på polär form av

$$z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right).$$

a) Markera så tydligt som möjligt i en figur var i det komplexa talplanet talet z ligger.

(1p)

b) Ange $|z|$.

(1p)

c) Beräkna z^5 och skriv resultatet på så enkel form som möjligt.

(2p)

a) (z ligger i 2:a kvadranten, på avstånd $\sqrt{3}$ från origo, linjestycket från origo till z bildar vinkel $\frac{3\pi}{5}$ med positiva realaxeln.)b) Eftersom z är givet på polär form kan vi direkt läsa av $|z|$ som koefficienten framför uttrycket $(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5})$, dvs $|z| = \sqrt{3}$.

c) Vi har att

$$z^5 = \left(\sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \right)^5 = (\sqrt{3})^5 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)^5.$$

Eftersom $(\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$ och genom att tillämpa de Moivres formel får vi då att

$$z^5 = 9\sqrt{3} \left(\cos 5 \frac{3\pi}{5} + i \sin 5 \frac{3\pi}{5} \right) = 9\sqrt{3} (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -9\sqrt{3}.$$

SVAR : b) $|z| = \sqrt{3}$ c) $z^5 = -9\sqrt{3}$