Hemtal 2, H2. Inlämning 27/9-2013

Uppgift 1

(Uppgift 46 i Sektion 2.2. i boken).
Bestäm de värden för a för vilka ekvationssystemet inte har någon lösning, exakt en lösning eller oändligt många lösningar.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & -7 \\ 2x & + & 3y & + & 17z & = & -16 \\ x & + & 2y & + & (a^2+1)z & = & 3a \end{array}$$

Uppgift 2

En vektor $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, och $\mathbf{v}_4$, om det existerar tal c_1, c_2, c_3, c_4 så att

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4.$$

I följande fall, ställ upp ekvationssystemet för bestämning av c_1, c_2,c_3, c_4. Avgör med hjälp av Matlab om systemet har någon lösning. Om en lösning finns så lös systemet.

a)

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

c)

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

Uppgift 3

(Uppgift 12 i Sektion 3.3, något modifierad) Ta reda på om följande matriser är inverterbara, och i så fall, beräkna inversen (för hand).

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För uppgift d) - e), använd Matlab.

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Uppgift 4

(Från uppgift 32 i Sektion 3.2). En kvadratisk matris A kallas idempotent om $A^2 = A$.

a) Visa att om A är idempotent, så är $I - A$ det också.

b) Visa att om A är idempotent, så är $2A - I$ inverterbar och sin egen invers.

Uppgift 5

a) För varje av följande mängd vektorer, bestäm om mängden är linjärt oberoende.

$$i)\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \qquad \text{where } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$ii)\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \text{ where } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

b) Bestäm för vilket värde/vilka värden på C som följande mängd är linjärt oberoende.

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}\,, \text{ where } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ C \end{bmatrix}.$$

Uppgift 6

a) Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$.

i) Om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är en linjärt beroende mängd, men $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende, vad kan du säga om $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

ii) Om $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, vad vet du då om $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$?

b) Låt

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ C \end{bmatrix}.$$

Vad är $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ för *a*) $C = -3$, *b*) $C = 1$?