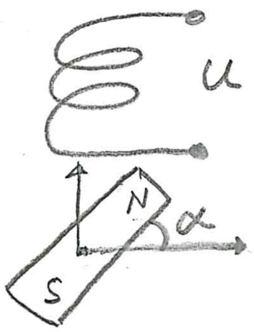
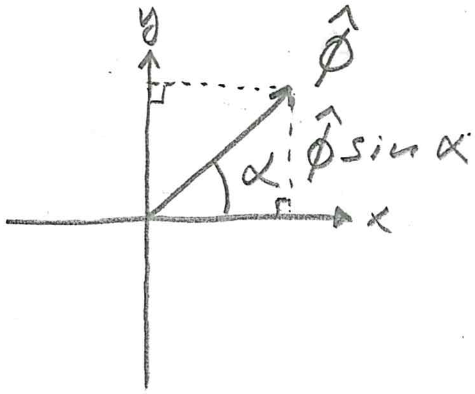
Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			1.	

Alstring av växelspänning AC.

Spole och roterande magnet som generator.



Vi gör en förenklad bild med en visare som roterar



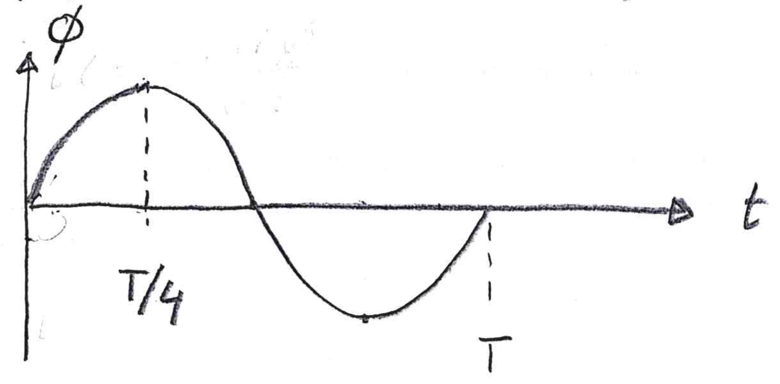
Flödet genom spolen kan ses som en projektion av den roterande visaren på y-axeln

$$\phi = \hat{\phi} \sin \alpha$$

Vid rotation med ω

$$\phi = \hat{\phi} \sin \omega t$$

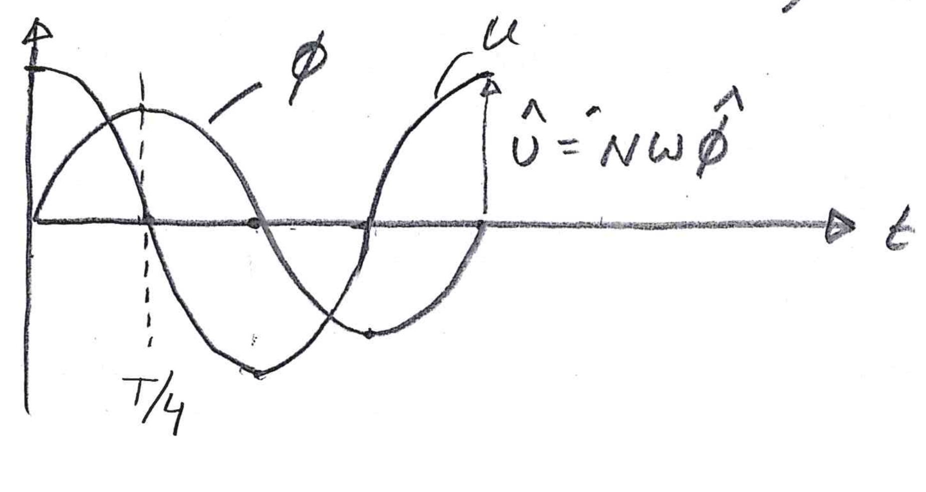
Flödet genom spolen kan ritas upp i ett tidsdiagram.



I spolen induceras en spänning

$u = N \frac{d\phi}{dt}$

Spänningen är derivatan = lutningen av flödet. Vid $t=0$ lutar flödet som mest och då är spänningen som störst. Spänningens amplitud är proportionell mot flödets amplitud. Om vinkelfrekvensen ω ökar så ökar ändringshastigheten på spänningen. Spänningens amplitud blir: $\hat{u} = N\omega\hat{\phi}$ och kan ritas in i samma tidsdiagram



Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			2	

Vi kan även derivera sinus matematiskt.

$$u = N\frac{d\phi}{dt} = N\frac{d}{dt}\left(\hat{\phi}\sin\omega t\right) =$$

$$= N\omega\hat{\phi}\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \hat{U} = N\omega\hat{\phi}$$

inre derivata

Vi kan även se att spänningens toppvärde, eller nollgenomgång, ligger förskjuten tiden T/4 i förhållande till motsvarande punkt för flödet. Spänningen antar ett toppvärde vid $t=0$ och flödet vid den senare tidpunkten $t=T/4$.

Detta motsvarar en vinkel

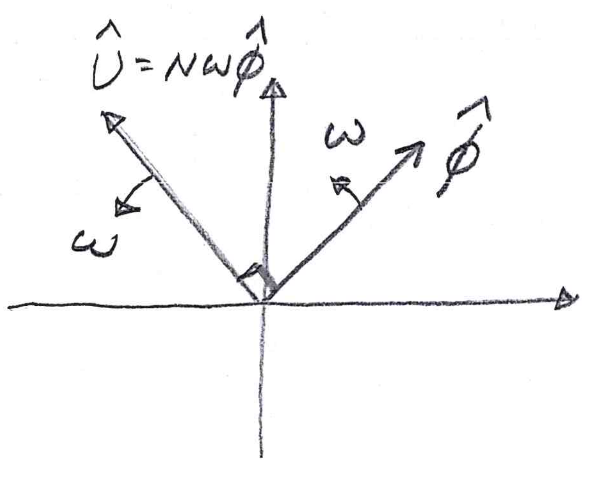
$$\omega\frac{T}{4} = 2\pi\cdot f\cdot\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{4} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Man säger att flödet ligger 90° efter spänningen i fas. Fasförskjutningen är 90°.

Den roterande magneten kan ses som en roterande visare vars projektion på en axel ger ett sinusformat tidsförlopp. Visaren är i detta fall på ett konkret sätt kopplad till en verklig magnet.

Eftersom även spänningen har sinusform kan även den kopplas till en roterande visare. Spänningsvisaren är lite mer abstrakt än flödesvisaren, som motsvarade en magnet.

Eftersom flödet ligger 90° efter i fas, så ligger spänningen 90° före flödet. Detta innebär att spänningsvisaren ligger 90° före flödesvisaren.



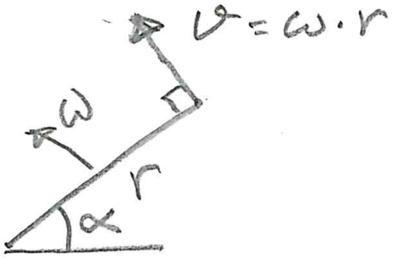
Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			3	

Det finns anledning att återknyta tidsderivata till hastighet

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Om tex $s = \hat{r}\sin\omega t$ blir $v = \omega \hat{r}\cos\omega t$ dvs hastigheten fås genom mult med ω och fasförskjutning 90° framåt.

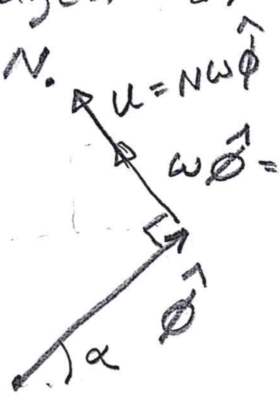
Om det är en roterande visare med radien r som roterar med vinkelhastigheten ω moturs blir periferihastigheten $v = \omega \cdot r$. Hastigheten bildar även rät vinkel med den roterande visaren.



Från induktionslagen har vi

$$u = N \frac{d\phi}{dt}$$

Spänningen är flödets hastighet mult med N.



$\omega\hat{\phi}$ = flödets "periferihastighet"

När man ritar visarna flyttar man dom ofta till origo för att lättare bilda projektionerna på y-axeln och därmed övergå till sinusformade tidsförlopp.

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			4	

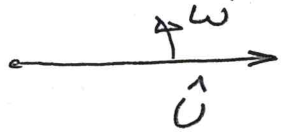
Vi har hittills studerat den inducerade spänningen i en spole. Inget har varit anslutet dvs kretsen har varit öppen och strömmen = 0. Detta kan ses som generatordrift i tomgång.

Om tex ett motstånd ansluts uppkommer en ström och det sker en effektutveckling, en värmeutveckling i motståndet. Denna ström ger ett bromsande moment på rotormagneten och ett lika stort vridande moment måste appliceras i rörelseriktningen för att rotorn skall rotera med konstant vinkelhastighet.
Den på så sätt tillförda mekaniska effekten omvandlas till värme i motståndet. Detta kan kallas generatordrift. Mekanisk effekt omvandlas till elektrisk. I detta exempel omvandlas även den elektriska till värme.

I det följande antar vi att spolen är en ideal växelspänningskälla som ger spänningen

$u = \hat{u} \sin \omega t$

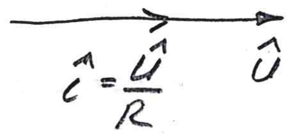
som motsvarar följande visare vid $t = 0$



Ansluts ett motstånd får vi

$u = R \cdot i \Rightarrow i = \frac{\hat{U}}{R} \sin \omega t$ och

de två visarna blir:



För kondensatorn har vi:

$q = C \cdot u$

Deriverar vi båda led får vi

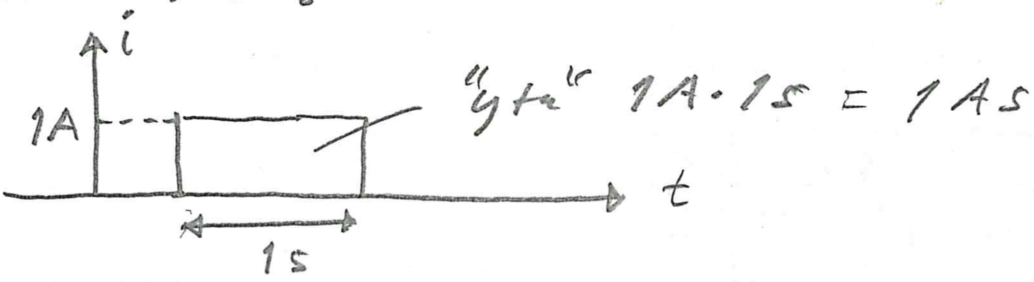
$$\frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

Derivatan av laddningen är laddningshastigheten, mängden laddning per sekund, som är strömmen.

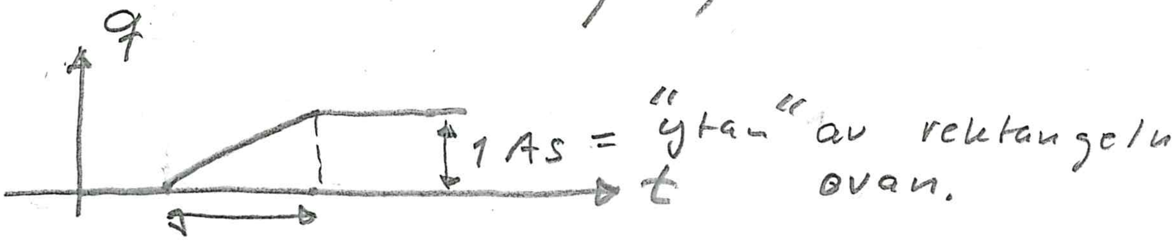
$$i = C \frac{du}{dt}$$

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			5	

Innan vi tittar på de sinusformade förloppen tänker vi oss att den konstanta strömmen 1 A flyter till en kondensator under tiden 1s.
Övrig tid är strömmen = 0.
Detta visas nedan



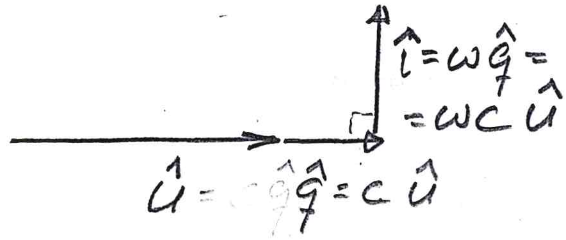
$i = \frac{dq}{dt}$ ger figuren nedan.
Vi låtsas att kondensatorn är oladdat från början, den är tom.



Det är lätt att se likheten mellan i och "hastighet" samt q och "sträcka".
Spänningen fås ur $q = C \cdot u$.
Man säger att kondensatorn är spänningströg. (eller lika gärna laddningsträg).
i ger efter ett tag q och därmed $u = \frac{q}{C}$

Åter till de sinusformade växelströmsförloppen.

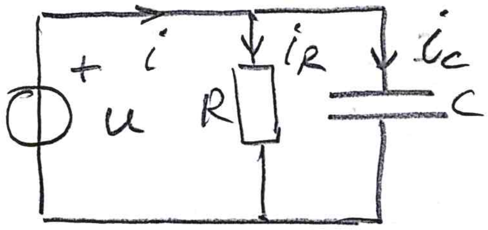
$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$



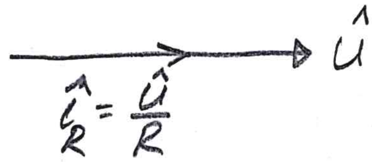
strömvisaren är "periferihastigheten" på q visarern.

Om $u = \hat{u}\sin\omega t$ blir $i = \omega C\hat{u}\,\underbrace{\sin(\omega t + 90^\circ)}_{\cos\omega t}$

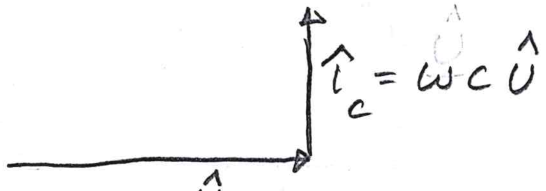
Parallellkoppling av R och C



För R gäller:



För C gäller:

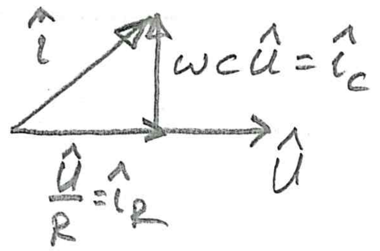


Totala strömmen fås genom att addera de två strömmarna, men som visare eller vektorer där hänsyn tas till riktningen.

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			6	

De båda visardiagrammen ritas på varandra och strömmarna adderas. Istället för att addera två sinusformade förlopp med trigonometriska formler adderas två visare. Efter additionen kan den totala strömmens tids-förlopp enkelt tas fram.

De två visardiagrammen:



$$\hat{i}^2 = \hat{i}_R^2 + \hat{i}_C^2 = \left(\frac{\hat{U}}{R}\right)^2 + \left(\omega C \hat{U}\right)^2$$

För en krets gäller $U = Z \cdot I$

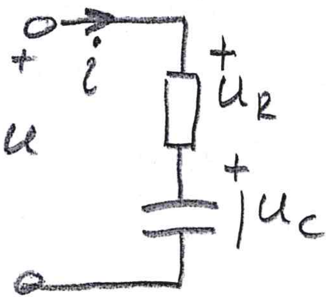
eller $\hat{U} = Z \cdot \hat{i}$ $\quad$ Z kallas kretsens impedans (jämför ohms lag

I den aktuella parallellkopplingen fås

$$\hat{i} = \sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2}\cdot\hat{u}$$

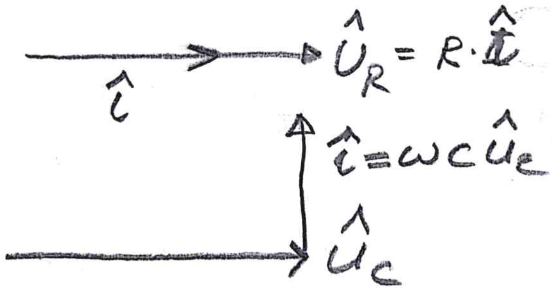
$$\Rightarrow \quad Z = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2}}$$

Seriekoppling av R och C



För R gäller:

För C gäller:

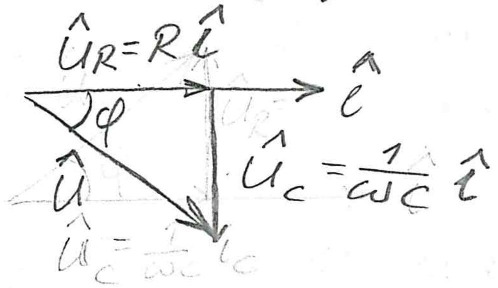


Den gemensamma storheten i en serie-koppling är ström och därför förekommer $\hat{i}$ i båda diagrammen. Eftersom dom pekar åt olika håll vrids det nedre diagrammet 90° bakåt innan diagrammen slås samman.

KTH VETENSKAP OCH KONST

Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			7	

Det sammanslagna diagrammet



De två delspänningarna u_R och u_C slås ihop till u

$$\hat{u}^2 = \hat{u}_R^2 + \hat{u}_C^2 = (R\hat{i})^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\hat{i}\right)^2$$

$$\hat{u} = \underbrace{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{\text{impedansen } Z} \cdot \hat{i}$$

Spänningen u ligger φ efter $\hat{i}$.

$$\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{1}{\omega C}\hat{i}}{R\hat{i}}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega \underbrace{RC}_{\tau}}\right)$$

Om spänningen är $u = \hat{u}\sin\omega t$ blir

strömmen $i = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi)$

där $\hat{i} = \hat{u} / \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$

och $\varphi = \operatorname{atan}(1/\omega RC)$

En induktor är en spole, i det ideala fallet är den resistansfri och har bara induktans. I början av skriften inducerade ett pulserande externt flöde en spänning i spolen. (den roterande magneten). Strömmen var då noll för att spolen var öppen, obelastad.

Nu är det tvärt om, det finns inget externt flöde. En spänning ansluts och en ström flyter som ger ett flöde genom spolen.

Ansluts spänningen u uppkommer enl induktionslagen:

$$u = N\frac{d\phi}{dt}$$

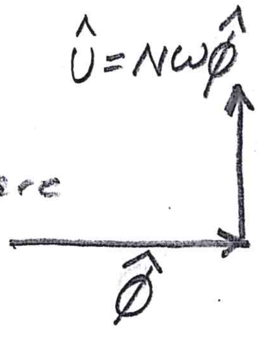
När den roterande magneten fanns gav $\phi = \hat{\phi}\sin\omega t$ upphov till $u = N\omega\hat{\phi}\cos\omega t$

$= \underbrace{N\omega\hat{\phi}}_{\hat{u}}\sin(\omega t + 90^\circ)$.

Nu ger $u = \hat{u}\sin(\omega t + 90^\circ)$ upphov till

$$\phi = \underbrace{\frac{\hat{u}}{N\omega}}_{\hat{\phi}}\sin(\omega t)$$

samma visardiagram som tidigare



Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.
			8	

Proportionalitet råder mellan ström genom en spole och det flöde som strömmen ger upphov till. Induktansen L är denna proportionalitets konstant enligt:

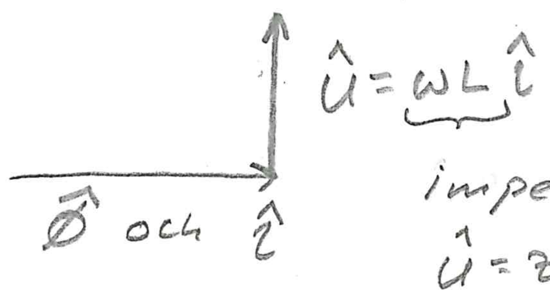
$$N\cdot\phi = L\cdot i \Rightarrow i = \frac{N\phi}{L}$$

Är spänningen $u = \hat{u}\sin(\omega t + 90°)$

blir flödet $\phi = \frac{\hat{u}}{N\omega}\sin\omega t$ och

strömmen $i = \frac{N}{L}\frac{\hat{u}}{N\omega}\sin\omega t = \underbrace{\frac{\hat{u}}{\omega L}}_{\hat{i}}\sin\omega t$

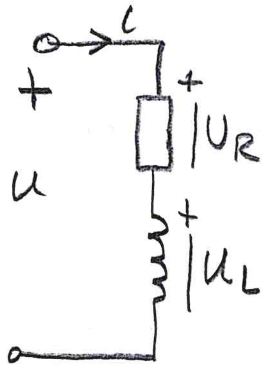
Visardiagram:



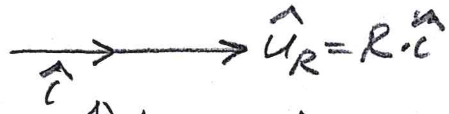
impedansen

$\hat{u} = z\cdot\hat{i}$ ni vet.

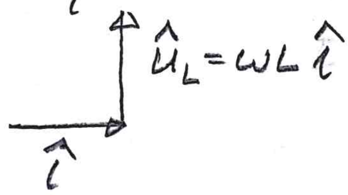
Seriekoppling av R och L.



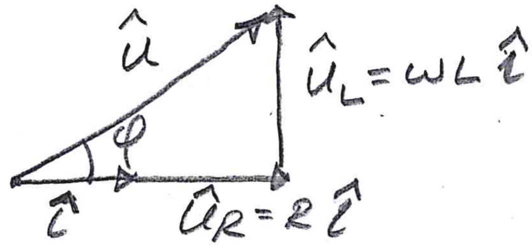
För R:



För L:



Sammanslaget:



$$\tan\varphi = \frac{\hat{u}_L}{\hat{u}_R} = \frac{\omega L \cancel{\hat{i}}}{R \cancel{\hat{i}}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\hat{u}^2 = \hat{u}_R^2 + \hat{u}_L^2 = \left(R\hat{i}\right)^2 + \left(\omega L \hat{i}\right)^2$$

$$\Rightarrow \hat{u} = \underbrace{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}_{\text{kretsens impedans.}}\ \hat{i}$$

Om $u = \hat{u}\sin\omega t$ blir $i = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi)$
där $\hat{i}$ och φ beräknas enligt ovan.