Föreläsning 7

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg

Avdelningen för Reglerteknik
Skolan för elektro- och systemteknik

26 september 2013

Introduktion

Förra gången:

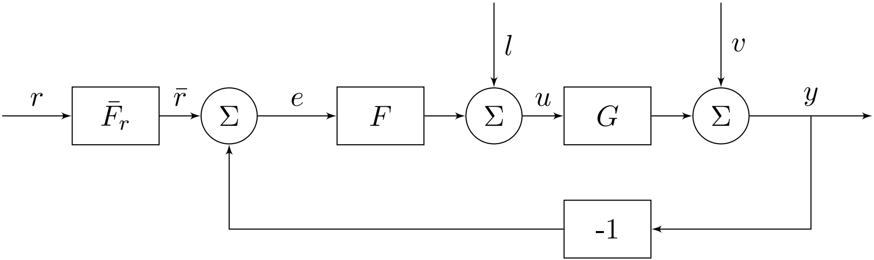
- Känslighet och robusthet

Dagens program:

- Repetion av känslighet och robusthet
- Tillståndsbeskrivning
- Linjärisering

Tester

Repetition:



$$Y = \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_c}\bar{R} + \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{S}V + \underbrace{\frac{G}{1+GF}}_{G_{ly}}L$$

$$U = \underbrace{\frac{F}{1+GF}}_{G_{ru}}\left[\bar{R} - V\right] + \underbrace{\frac{1}{1+GF}}_{S}L$$

Reglerdesign $\Rightarrow F \; (G_o = GF)$

Tester

Tester (De fyras gäng):

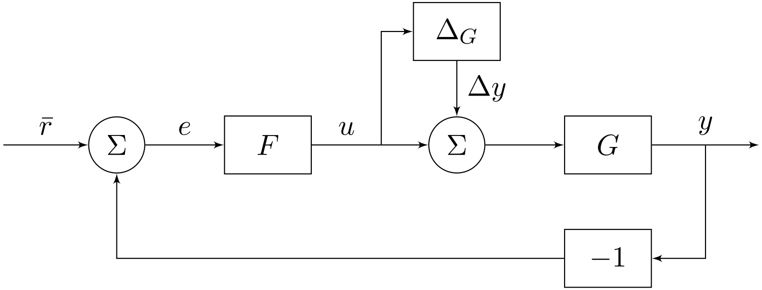
1. Plotta $|G_c(i\omega)|$ (speciellt ω_B och M_p)
   $G_c(i\omega) \approx 1 \quad \omega < \omega_B$

2. Plotta $|S(i\omega)|$ (känslighetsfunktionen)
   $S(i\omega) + G_c(i\omega) = 1 \Rightarrow$
   $S(i\omega) \approx 0 \quad \omega < \omega_B$
   Information om hur **utsignal**-störningar undertrycks.

3. Plotta $|G_{ly}(i\omega)|$
   $G_{ly} = \frac{G}{1+GF}\frac{F}{F} = G_c\frac{1}{F} \approx \frac{1}{F} \quad \omega < \omega_B$
   Information om hur **insignal**-störningar undertrycks

4. Plotta $|G_{ru}(i\omega)|$
   $G_{ru} = \frac{F}{1+GF}\frac{G}{G} = G_c\frac{1}{G} \approx \frac{1}{G} \quad \omega < \omega_B$
   Information om styrsignalens storlek

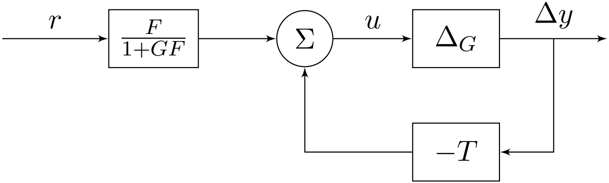
Robusthet

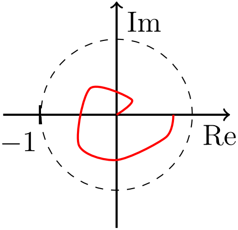


$$\begin{cases} U &= -\frac{GF}{1+GF}\Delta Y + \frac{F}{1+GF}\bar{R} \\ \Delta Y &= \Delta_G U \\ T &= G_c = \frac{GF}{1+GF} \end{cases}$$

Robusthet

Rita:





Stabilt om kretsförstärkningen < 1.

$$\Rightarrow |T(i\omega)\Delta_G(i\omega)| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall\, \omega}$$

Robusthetskriteriet från förra föreläsningen!

Robusthet

Exempel (Filtrering av referenssignal)

F_r påverkar **ej** robust- och känslighet

F_r påverkar servoegenskaper (dvs. $r \to y$)

Exempelvis kan F_r vara ett lågpassfilter som ger lugnare uppförande vid steg etc.

Tillståndsbeskrivning

Differentialekvation:

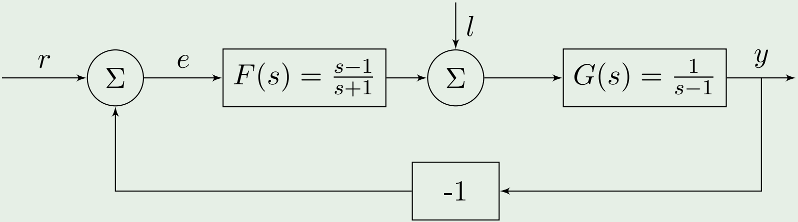
$$\ddot{y}(t) + \bar{a}_1\dot{y}(t) + \bar{a}_2 y(t) = \bar{b}_0\dot{u}(t) + \bar{b}_1 u(t)$$

Överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{\bar{b}_0 s + \bar{b}_1}{s^2 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2}$$

Tillståndsbeskrivning

Exempel



$$G_c = \frac{GF}{1+GF} = \frac{\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{1}{s+2} \qquad \text{Stabilt!}$$

$$G_{ly} = \frac{G}{1+GF} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \qquad \text{Instabilt!}$$

Varning: Överföringsfunktionsalgebra kan ge ”felaktiga” slutsatser (pga. begynnelsevärden = 0).

Tillståndsbeskrivning

Tillståndsmodell:
En andra ordningens differentialekvation kan överföras till två stycken kopplade första ordningens differentialekvationer.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\
y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Tillståndsbeskrivning

Allmänt ($n \sim 2$):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Där vi har infört *tillståndsvektorn* som

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

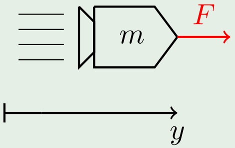
vilken innehåller all inre kunskap som är nödvändig för att avgöra systemets framtida uppförande.

Tillståndsbeskrivning

Att gå från differentialekvation till tillståndsmodell:

I. Fysikaliska tillstånd
II. Diagonalform
III. Styrbar kanonisk form
IV. Observerbar kanonisk form

Exempel (I. Fysikaliska tillstånd)



Styrsignal: F, kraft
Utsignal: y, läge

$\{$ Newton II $\}$ $\Longrightarrow m\ddot{y} = F \Longrightarrow \ddot{y}(t) = \frac{1}{m}u(t)$ (Dubbelintegrator)

Låt nu

$$\begin{cases} x_1(t) & = y(t) \quad \text{läge} \\ x_2(t) & = \dot{y}(t) \quad \text{hastighet} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Tillståndsbeskrivning

Exempel (II. Diagonalform (Partialbråk))

I en DC-motor ges överföringsfunktionen av

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1}$$

och utsignalen fås då genom

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}U(s)}_{X_1(s)} + \underbrace{\frac{-1}{s+1}U(s)}_{X_2(s)}$$

vilket ger oss

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = -x_2(t) - u(t) \\ y(t) & = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Tillståndsbeskrivning

Exempel (II. Diagonalform (Partialbråk), fort.)

Ur vilka vi kan identifiera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

samt

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tillståndsbeskrivning

Att gå från tillståndsbeskrivning till överföringsfunktion:

$$\left.\begin{array}{ll}\dot{x} & = Ax + Bu \\ y & = Cx + Du\end{array}\right\} \stackrel{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Observera dock att vi antagit att $x(0) = 0$!

$$\Longrightarrow \left[sI - A\right]X(s) = BU(s)$$

Genom en Laplacetransform av den andra ekvationen och sen med insättning av uttrycket för $X(s)$ ovan fås

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = \Big(C\left[sI - A\right]^{-1}B + D\Big)U(s)$$

varur vi kan identifiera överföringsfunktionen

$$\boxed{G(s) = D + C\left[sI - A\right]^{-1}B}$$

Tillståndsbeskrivning

Exempel

Givet systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

beräknar vi

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

som vi enkelt inverterar med regeln för en invers av 2×2-matriser

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tillståndsbeskrivning

Exempel

Som för oss ger att

$$\big[sI - A\big]^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow C\big[sI - A\big]^{-1}B = \frac{1}{s^2}$$

Detta kan jämföras med

$$\ddot{y} = u, \;\; G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Systemets poler:

$$\det\left(sI - A\right) = s^2 \quad \text{(sekulär ekvation)}$$

Observera att detta ger *egenvärderna* till A:

$$Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

$$\Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

Tillståndsbeskrivning

Allmänt gäller att

$$G(s) = \frac{C(sI - A)^* B}{\det(sI - A)} + D$$

där $(sI - A)^*$ är adjunktmatrisen till $(sI - A)$.

$$\boxed{\text{Systemets poler } = A\text{-matrisens egenvärden}}$$

Linjärisering

Verkliga system är oftas *olinjära*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Exempel (Olinjärt system)

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + x^2 + \sin u \\ y &= e^x + \cos u \end{cases}$$

Linjärisering

Låt oss anta att insignalen är konstant, $u(t) = u_0$, och att då

$$x(t) \to x_0, \quad t \to \infty$$
$$\left(\dot{x}(t) \to 0, \quad t \to \infty\right)$$

Stationär punkt: (x_0, u_0, y_0)

$$\begin{aligned} f(x_0, u_0) &= 0 \\ h(x_0, u_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Vi studerar *små* variationer kring denna punkt:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta u &= u - u_0 \\ \Delta y &= y - y_0 \end{aligned}$$

Linjärisering

Derivering av Δx ger sedan

$$\Delta \dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x - x_0\Big] = \dot{x} = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = \ \{ \text{ Taylor } \} \ =$$

$$= \underbrace{f(x_0, u_0)}_{=0} + f_x(x_0, u_0)\Delta x + f_u(x_0, u_0)\Delta u + \text{högre ordningens termer}$$

Observera att vi behandlar matriser här:

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, .., x_n, u) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, .., x_n, u) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \cdots \\ \nabla f_n \end{bmatrix}$$

Linjärisering

På liknande sätt för Δy får vi

$$\Delta y = y - y_0 = h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - y_0) = \ \{ \text{ Taylor } \} \ =$$

$$= \underbrace{h(x_0, u_0) - y_0}_{=0} + h_x(x_0, u_0)\Delta x + h_u(x_0, u_0)\Delta u + \text{h.o.t.}$$

Vilket ger oss uttrycken för den *linjära approximationen*:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \end{aligned}$$

där

$$A = f_x(x_0, u_0), \quad B = f_u(x_0, u_0)$$

$$C = h_x(x_0, u_0), \quad D = h_u(x_0, u_0)$$

Viktigt: Detta gäller bara för små Δx, Δu och Δy!