Hemtal 3, H3. Inlämning 11/10-2013

Lösningarna till uppgifterna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Använd gärna Matlab för att kontrollera att du har räknat rätt.

Kom ihåg att skriva lösningarna till varje uppgift på separata blad samt fylla i ett försättsblad. Häfta INTE ihop lösningsbladen. Två av nedanstående uppgifter kommer att samlas in för rättning. Vilka meddelas på lektionen den 11/10.

Uppgift 1

Bestäm för vilket värde/vilka värden på k som nedanstående matris är inverterbar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

a) Genom att beräkna determinanten av A.

b) Genom att rad-reducera A till echelon form.

Uppgift 2

Antag att A är en kvadratisk matris.

a) Visa att $\det(A^T A) = \det(AA^T)$.

b) Visa att A är inverterbar *om och endast om* $A^T A$ är inverterbar.

Uppgift 3

Beräkna egenvärdena för följande matriser (för hand)

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beräkna även egenvärden och egenvektorer till matriserna med Matlab.
För varje fall *a*)-*d*), bestäm om egenvektorerna till matrisen är linjärt oberoende. Om så inte är fallet, ta bort egenvektorer ur mängden tills du har en linjärt oberoende mängd. Vilka egenvärden hör de kvarvarande egenvektorerna till?

Uppgift 4

Låt $\mathbf{u}$ vara en fix vektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att följande avbildning, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ där $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ är en linjär avbildning.

Uppgift 5

Följande linjära avbildning $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$ är given.

a) Bestäm avbildningens standardmatris.

b) Är avbildningen ett-till-ett?

c) Är avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *på* (en. onto)?

I b) och c) måste du motivera dina svar. Det räcker inte med ett ja eller nej.

Uppgift 6

$$\text{Låt} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

och definiera en linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Hitta bilden av $\mathbf{u}$ under $T(\mathbf{u})$.

b) Hitta en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^2$ som avbildas på $\mathbf{b}$.

c) Finns det mer än en vektor $\mathbf{x}$ som avbildas på $\mathbf{b}$? Du måste motivera ditt svar. Ett ja eller nej räcker inte.

d) Bestäm om $\mathbf{c}$ ligger i T's värdemängd/bildrum (en. range).