**Kontrollskrivning 2 SF1661 Perspektiv på Matematik**
Torsdagen 27 september 2012, 10.15 – 11.30
Svar och lösningsförslag

**1.** a) Bestäm koefficienten framför $x^6y^5$ i utvecklingen av $\left(x+\frac{y}{2}\right)^{11}$.

b) För vilka reella tal $x$ gäller det att

$$2^{2x}+2^x\leq 20 \quad ?$$

---

a) Enligt Binomomialsatsen ges termen som innehåller $x^6y^5$ av

$$\binom{11}{5}x^6(\frac{y}{2})^5=\binom{11}{5}\frac{1}{2^5}x^6y^5=\frac{11!}{5!(11-5)!}\frac{1}{2^5}x^6y^5=\frac{11!}{5!6!}\frac{1}{2^5}x^6y^5.$$

Den sökta koefficienten är alltså

$$\frac{11!}{5!6!}\frac{1}{2^5}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2^5}=\frac{231}{16}.$$

b) Vi gör substitutionen $t=2^x$, där då $t>0$. Då är också $2^{2x}=(2^x)^2=t^2$. Den givna olikheten kan då skrivas

$$t^2+t\leq 20 \iff \left(t+\frac{1}{2}\right)^2\leq 20+\frac{1}{4} \iff \left(t+\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{81}{4}$$

vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$-\sqrt{\frac{81}{4}}\leq\left(t+\frac{1}{2}\right)\leq\sqrt{\frac{81}{4}} \iff -\frac{9}{2}\leq\left(t+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{9}{2} \iff -5\leq t\leq 4.$$

Alltså är olikheten uppfylld för

$$-5\leq 2^x\leq 4 \iff 0\leq 2^x\leq 4 \iff x\leq 2$$

eftersom $2^x>0$ för allla $x$ och $2^x$ växer när $x$ växer.

SVAR: a) $\frac{231}{16}$ b) $x\leq 2$

---

**2.** a) Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad 3 sådant att
$p(1)=p(i)=p(-i)=0$, och faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i polynom med reella koefficienter.
b) Skriv polynomet $q(x)=x^3-3x^2+4x+2$ på formen $At^3+Bt+C$, genom att substituera $x$ med en lämplig ny variabel $t$.

---

a) Faktorsatsen ger att $(x-1)$, $(x-i)$ och $(x+i)$ är faktorer i $p(x)$. Eftersom $p$ är av grad 3 har $p$ inga ytterligare faktorer av grad 1 eller högre. Alltså är

$$p(x) = k(x-1)(x-i)(x+i) = k(x-1)(x^2+1)$$

där $k \neq 0$ är en godtycklig komplex konstant. Vi kan t ex välja $k = 1$.

b) Vi "kubkompletterar" $q$ för att bli av med andragradstermen,

$q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x + 3 = (x-1)^3 + x + 3.$

Vi vill nu välja $t = x - 1$ som ny variabel,

$$q(x) = (x-1)^3 + x - 1 + 4 = t^3 + t + 4.$$

SVAR: a) T ex $p(x) = (x-1)(x^2+1)$ b) $q(x) = t^3+t+4$ om $t = x-1$.

---

**3.** a) Visa att

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{9}{(100)^k} = \frac{(10)^{10} - 1}{11 \cdot (10)^{10}}.$$

b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{(100)^k}$$

och ange summan som både som decimaltal och på formen $\frac{p}{q}$, $p, g \in \mathbb{N}$, där $\mathrm{SGD}(p, q) = 1$.

---

a) Låt $S = \sum_{k=1}^{5} \frac{9}{(100)^k}$ . $S$ är då en geometrisk summa med kvot $1/100$. Vi bildar

$$\frac{1}{100} S = \sum_{k=2}^{6} \frac{9}{(100)^k}.$$

Vi får då att

$$\frac{99}{100} S = S - \frac{1}{100} S = \sum_{k=1}^{5} \frac{9}{(100)^k} - \sum_{k=2}^{6} \frac{9}{(100)^k} = \frac{9}{(100)} - \frac{9}{(100)^6}.$$

Av ytterleden får vi då, efter ledvis division med 9 och i nästa steg ledvs multiplikation med 100 följt av förenkling,

$$\frac{11}{100} S = \frac{1}{(100)} - \frac{1}{(100)^6} \iff 11S = 1 - \frac{1}{(100)^5} = \iff 11S = \frac{(10)^{10} - 1}{(10)^{10}}.$$

Alltså är

$$S = \frac{(10)^{10} - 1}{11 \cdot (10)^{10}},$$

och påståendet är bevisat.

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{(100)^k} = \frac{9}{100} + \frac{9}{(100)^2} + \cdots = 0.09 + 0.0009 + \cdots = 0.090909\ldots.$$

Formeln för summa av en geomterisk serie ger också att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{(100)^k} = \frac{\frac{9}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}.$$

Vi kontrollerar genom att utföra divisionen $\frac{1}{11}$ och ser att $\frac{1}{11} = 0.090909\ldots$
.

SVAR b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{(100)^k} = \frac{1}{11} = 0.090909\ldots$ .

---