Reglerteknik AK Tentamen 2012-10-19
Lösningar

Uppgift 1a

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$
$$Y(s) = -X_1(s) + 2X_2(s), \quad X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s),\ X_2(s) = \frac{1}{s+2}U(s)$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = -x_1(t) + 2x_2(t), \quad \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t),\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t),$$

Svar:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Uppgift 1b

Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{\frac{K(1-s)}{s(s+1)}}{1 + \frac{K(1-s)}{s(s+1)}} = \frac{K(1-s)}{s(s+1) + K(1-s)} = \frac{K(1-s)}{s^2 + (1-K)s + K}$$

För stabilitet krävs: $1 - K > 0$ och $K > 0$.
Svar: Stabilt för $0 < K < 1$

Uppgift 1c

Observera att med $y(t) = x(t)$ så blir $G(s) = 1/(s-a)$
i) **Svar:**

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)d\tau = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{\lambda\tau}d\tau$$
$$= e^{at}x(0) + e^{at}[\frac{1}{\lambda - a}e^{(\lambda-a)\tau}]_0^t = e^{at}[x_0 - \frac{1}{\lambda - a}] + \frac{1}{\lambda - a}e^{\lambda t}$$

ii) **Svar:** Ingen transient om $x_0 = \frac{1}{\lambda - a}$. I detta fall blir $x(t) = G(\lambda)e^{\lambda t}$

Uppgift 1d

Derivera relationen mellan u och e

$$\dot{u}(t) = 10\dot{e}(t) + e(t).$$

Approximera tidsderivatan med Tustins formel.

$$\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}u(t) = 10\frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}e(t) + e(t),$$

Applicera $1 + q_T^{-1}$ på höger och vänster sida och lös ut $u(t)$

$$u(t) = u(t-T) + (10 + T/2)e(t) + (T/2 - 10)e(t-T).$$

Insättning med $T = 0.2$ ger
Svar: $u(t) = u(t-0.2) + 10.1e(t) - 9.9e(t-0.2)$.

Uppgift 2a

Vi vill rita rotorten med avseende på K.

(i). Det slutna systemet blir

$$G_c(s) = \frac{FG}{1+FG} = \frac{(s+1)(s-1)(s+10)}{(s+1)(s-1)(s+10) + K(1+0.5s)}$$

(ii). Vi identifierar $P(s) = (s+1)(s-1)(s+10) = s^3 + 10s^2 - s + 10$ och $Q(s) = 1 + 0.5s$.

(iii). Hittar startpunkter, $K = 0$,

$$P(s) = (s+1)(s-1)(s+10) = 0 \Rightarrow s \in \{-1, 1, -10\}$$

Vi har $n = 3$ startpunkter.

(iv). Hittar slutpunkter, $K \to \infty$

$$Q(s) = 1 + 0.5s = 0 \Rightarrow s \in \{-2\}$$

Vi har $m = 1$ slutpunkter.

(v). Antal asymptoter $= n - m = 2$

(vi). Skärningspunkt $= \frac{1}{n-m}\left(\sum startpunkter - \sum slutpunkter\right) = \frac{1}{2}(-8) = -4$

(vii). Hitta asymptoter $= \frac{\pi}{n-m} + \frac{2\pi k}{n-m}, \quad k = \{0, 1\}$, dvs $\pi/2$ och $3\pi/2$

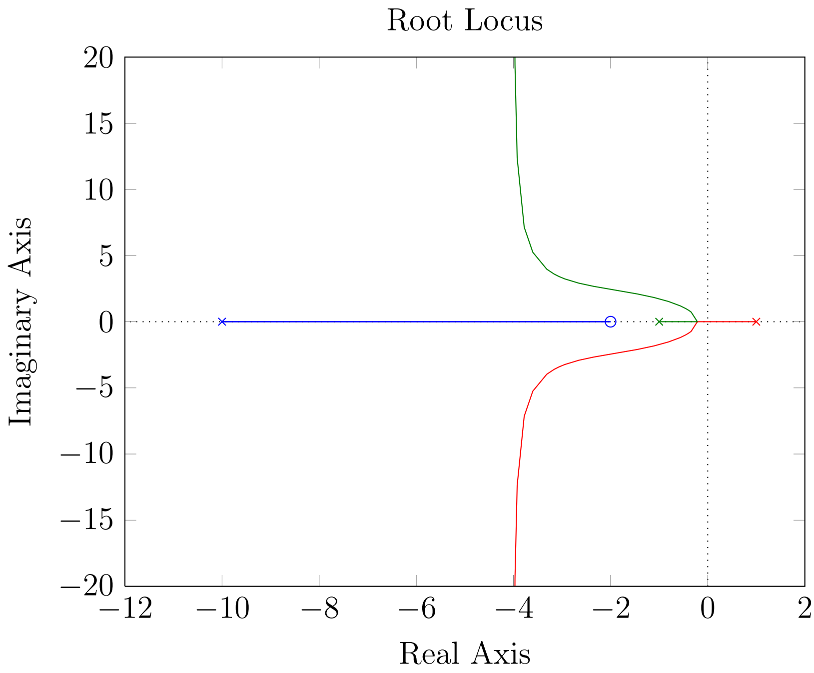

Figure 1: Rotorten med avseende på K för systemet i uppgift 2(a).

(viii). Hitta skärning med imaginary axeln. $P(s) + KQ(s) = 0$. Ansätt $s = i\omega$ och lös realdel och imaginärdel för sig.
Realdel:

$$-10\omega^2 - 10 + K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = 10\omega^2 + 10$$

Imaginärdel

$$\omega^3 - \omega + K/2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(K/2 - \omega^2 - 1) = 0$$

Sätt in värdet för K

$$\omega(4\omega^2 + 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \{0, \pm i\}$$

Men $\omega = \pm i$ är inte giltiga lösningar efter ω är ett reellt tal. Så vi har enbart skärning i origo för $K = 10$

(ix). De delar av reella axeln som tillhör rotorten ges av de delar som har ett udda antal start och slutpunkter till höger om sig. Det vill säga mellan -10 och -2 och mellan -1 och 1.

(x). Den slutgiltiga rotorten finns avbildad i Figur (1)

Svar: Det slutna systemet är stabilt för $K > 10$

Uppgift 2b

$G(0) = 1$, $G'(0) = -\tau$ medför $K_I = 1/2\tau$ vilket ger

$$G_c = \frac{\frac{1}{2\tau s(1+\tau s)}}{1 + \frac{1}{2\tau s(1+\tau s)}} = \frac{1}{2\tau s(1+\tau s)+1} = \frac{1}{1+2\tau s + 2\tau^2 s^2}$$

Svar: Poler i $\frac{1}{2\tau}(-1 \pm i)$. Observera att polernas avstånd till origo är proportionellt mot $1/\tau$.

Uppgift 3a

Systemet har skärfrekvensen $\omega_c = 0.68$ rad/s, och med den proportionella regulatorn måste vi hålla en skärfrekvens över $\omega_c/4 = 0.17$ rad/s. Där vill vi i andra hand maximera fasmarginalen, vilket uppnås vid det lokala maximat $\omega = 0.255$ rad/s, en fasmarginal på 52° och där amplituden för systemet är $|G(i\omega)| = 2.98$. K-värdet väljs alltså till $K = 1/2.98 = 0.34$ för att uppnå den skärfrekvensen. **Svar:** $K = 0.34$

Uppgift 3b

Vi vill nu behålla samma fasmarginal $\phi_m = 52°$, samt ändra skärfrekvensen till $\omega_{c,d} = 5 * 0.255 = 1.275$ rad/s. Fasen är där $-195°$, och behöver alltså höjas med 67°, plus 6° för lag-kompensatorn. Totalt 73°, och vi väljer därför att använda dubbla lead-kompensatorer, som vardera höjer fasen med 37°.
$\beta = 0.25$, $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 1.57$
$K = \frac{\beta}{|G(i\omega_{c,d}|} = 0.72$, där $|G(i\omega_{c,d})| = 0.35$.
Slutligen bestämmer vi lag-kompensatorn. Vi har att

$$\frac{1}{1+K_P G(0)} \cdot 0.1 = \frac{1}{1+\frac{K_{lead}}{\gamma}G(0)}$$

Med $|G(0)| = 880$ fås $\gamma = 0.21$. $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 7.8$.
Svar: Den kompletta regulatorn blir

$$F_{lead-lag}(s) = K\left(\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\right)^2 \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

med $K = 0.72$, $\beta = 0.25$, $\tau_D = 1.57$, $\gamma = 0.21$ och $\tau_I = 7.8$.

Uppgift 4a

Derivering av tillståndsvektorn m.a.p. tiden ger

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_4 \\ -u\cos(x_1 - x_3) + x_2^2 \sin(x_1 - x_3) - \sin(x_3) \end{bmatrix}}_{=f(x,u)}$$

Uppgift 4b

Jämviktspunkten upfyller $f(x_0, u_0) = 0$, vilket ger:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_0 = 0$$

Det lineariserade systemet ges av

$$\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u$$

där

$$A = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \begin{matrix} u\sin(x_1 - x_3) \\ +x_2^2\cos(x_1 - x_3) \end{matrix} & 2x_2\sin(x_1 - x_3) & \begin{matrix} -u\sin(x_1 - x_3) \\ -x_2^2\cos(x_1 - x_3) \\ -\cos x_3 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}_{x_0, u_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \frac{\partial f(x_0, u_0)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\cos(x_1 - x_3) \end{bmatrix}_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Uppgift 4c

Systemet är stabilt omm alla egenvärden till A har strikt negativ realdel. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - sI) = \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix} = s^2(s^2 - 1)$$

vilket ger lösningarna $s_1 = s_2 = 0$, $s_{3,4} = \pm 1$. Alltså är systemet instabilt. Jämviktsläget $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ motsvarar en inverterad dubbelpendel, som inte kommer att förbli i sitt jämviktsläge.

Uppgift 4d

Polerna till $A - BL$ kan placeras godtyckligt om (A, B) är styrbart. Vi undersöker rangen för styrbarhetsmatrisen:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efterson $\mathcal{S}$ har full rang så är (A, B) styrbart, och polerna till $A - BL$ kan därför väljar godtyckligt. Vi väljer L så att polerna till $A - BL$ hamnar i VHP. Till exempel kan vi välja en pol av ordning 4 i -1, vilktet ger oss den önskade karakteristiska ekvationen

$$0 = (s + 1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

Karakteristiska ekvationen för $A - BL$ är

$$\begin{aligned} \det(A - BL - SI) &= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & -l_3 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & -l_3 & -l_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} -s & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & -l_2 - s & l_3 & l_4 \\ 0 & 0 & -s & 1 \\ -l_1 & -l_2 & 1l_3 & l_4 - s \end{bmatrix} \\ &= -l_1 - l_2\, s + (l_1 - l_3 - 1)\, s^2 + (l_2 - l_4)\, s^3 + s^4 \end{aligned}$$

Genom att jämföra koeficienterna i dessa polynom med varandra får vi $l_1 = -1$, $l_2 = -4$, $l_3 = -8$, $l_4 = -8$.
Svar: Systemet är styrbart och t.ex. $u(t) = -x_1(t) - 4x_2(t) - 8x_3(t) - 8x_4(t)$ ger ett stabilt återkopplat system

Uppgift 5a,b

$$G_o(i\omega) = \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega T} = \frac{1}{\omega}e^{-i(\omega T + \pi/2)}$$

och $|G_0(i\omega)| = 1$ vid skärfrekvensen $\omega_c = 1$ Fasen är då $-\pi/2 - T$, dvs fasmarginalen är $\varphi_m = \pi/2 - T$. Här inses att $T < \pi/2$ krävs för stabilitet.
Observera att $|G_o(i\omega_c)| = 1$ medför att

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = |G_c(i\omega_c)|$$

dvs räkningarna högst upp på sidan 103 i kursboken ger

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)}$$

Svar: $\omega_c = 1$, $\varphi_m = \pi/2 - T$, där $T < \pi/2$ för positiv fasmarginal, $|S(i\omega_c)| = 1/(2\sin(x))$, $0 \leq x < \pi/4$, där $x = \pi/4 - T/2$.

Uppgift 5c,d

$G_o(i\omega)$ skär reella axeln då $\omega_p T = \pi/2$, dvs $\omega_p = \pi/(2T)$, där $T < \pi/2$ för stabilitet. Förstärkningen blir

$$G_o(i\omega_p) = -\frac{2T}{\pi} \quad \Rightarrow \quad |S(i\omega_p)| = \frac{1}{(1 - 2T/\pi)}, \quad A_m = \pi/(2T)$$

Svar: $\omega_p = \pi/(2T)$, $A_m = \pi/(2T)$, där $T < \pi/2$ för $A_m > 1$. $|S(i\omega_p)| = \pi/(4x)$, $0 \leq x < \pi/4$, där $x = \pi/4 - T/2$.

Uppgift 5e

Vi behöver avgöra när

$$\frac{4x}{\pi} < 2\sin(x), \quad 0 \leq x < \pi/4$$

Om så är fallet så är $|S(i\omega_p)| > |S(i\omega_c)|$ och uppskattningen vid fas-skärfrekvensen ger bäst uppskattning av $M_s = \max_\omega |S(i\omega)|$. Låt $f(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin(x)$, för vilket $f(0) = 0$ och $f(\pi/4) = 1/2 - 1/\sqrt{2} < 0$. Derivatan är negativ

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos(x) < 0, \quad 0 \leq x < \pi/4$$

eftersom $\cos(x) > \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} > 2/\pi$ för $0 \leq x < \pi/4$. Funktionen $f(x)$ därmed är avtagande i hela intervallet,dvs

$$\frac{4x}{\pi} < 2\sin(x), \quad \forall\, 0 < x < \pi/4$$

Svar: För detta exempel med $0 < T < \pi/2$ ger alltid $|S(i\omega_p)|$ bästa uppskattningen av $M_s = \max_\omega |S(i\omega)|$.