KTH Teknikvetenskap

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 24 oktober 2013 kl 14.00 – 19.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Låt $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ och låt $w = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
Beräkna

$$\frac{z^{11}}{w^3}$$

och markera talet $\frac{z^{11}}{w^3}$ i en figur av det komlexa talplanet.

(2) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$4^{4x} + 4 \cdot 2^{4x} = 32.$$

(3) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara den funktion som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{då } x \geq 0; \\ 2^{x/3}, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Visa att funktionen f är inverterbar. Bestäm också f^{-1}, skissera grafen $y = f^{-1}(x)$ och ange definitionsmängd och värdemängd till f^{-1}.

Del II

(4) a) Vilket är det minsta naturliga tal m som har både 126 och 770 som delare? (Det är detsamma som att fråga efter den minsta gemensamma nämnaren m vid addition av typen $\frac{a}{126} + \frac{b}{770}$.) (2p)

b) Vilket är det största naturliga tal som är en delare i både 126 och 770 ? (2p)

(5) Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av $(e^x + e^{-2x})^6$.

(6) Antag att $0 \leq v \leq \pi$ och att $\cos v = 0.6$. Beräkna

a) $\sin(\frac{\pi}{2} - v)$ b) $\sin(-v)$ c) $\cos 2v$ d) $\cos\frac{v}{2}$

Varje deluppgift i uppgift 6 är värd 1 p.
Du får använda dig av att $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ och att $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. För att få full poäng måste du härleda alla övriga trigonometriska formler du använder dig av.

Del III

(7) Avgör vilka reella tal x som uppfyller olikheten

$$\left|x^2 + 2x + 4\right| < |x - 4| .$$

(8) Använd linjär approximation för att bestämma ett närmevärde till $\sqrt{24.8}$. Illustrera med en tydlig figur.

(9) Som bekant kan vi uttrycka naturliga tal i andra talbaser än bas 10, till exempel gäller att $(41)_{10} = (1112)_3$. (Detta behöver du inte visa.) Låt oss bestämma att den ledande siffran ska vara $\neq 0$, till exempel tillåter vi inte att talet ”fyrtioett” skrivs som $(041)_{10}$ eller $(001112)_3$.

Vilket är då det största respektive minsta naturliga tal som i bas b kan skrivas med exakt n siffror?

Svaren ska uttryckas i bas 10 och förenklas så långt som möjligt.

Om du löser uppgift 9 korrekt i speciallfallet $b = 5$ och $n = 4$ får du 1 poäng. Om du löser uppgift 9 korrekt i det generella fallet får du 4 poäng.
