SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 24 oktober 2013 kl 14.00 – 19.00
Svar och lösningsförslag

(1) Låt $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ och låt $w = 16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
Beräkna

$$\frac{z^{11}}{w^3}$$

och markera talet $\frac{z^{11}}{w^3}$ i en figur av det komlexa talplanet.

Lösning. De Moivres formel ger att

$$z^{11} = \left(2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\right)^{11} = 2^{11}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$$

och

$$w^3 = \left(16(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right)^3 = (16)^3(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}) = 2^{12}(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Vi division av två komplexa tal i polär form divideras beloppen medan argumentet subtraheras, så

$$\frac{z^{11}}{w^3} = \frac{2^{11}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})}{2^{12}(\cos\pi + i\sin\pi)} = \frac{1}{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}.$$

Svar. Talet $\frac{z^{11}}{w^3} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$ och ligger i 2:a kvadranten på cirkeln med medelpunkt i origo med radie 1/2, linjestycket från origo till $\frac{z^{11}}{w^3}$ bildar vinkel $5\pi/6$ med positiva reella axeln.

---

(2) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$4^{4x} + 4\cdot 2^{4x} = 32.$$

Lösning. Eftersom $4^{4x} = (4^{2x})^2$ och $2^{4x} = (2^2)^{2x} = 4^{2x}$ är

$$4^{4x} + 4\cdot 2^{4x} = 32 \iff (4^{2x})^2 + 4\cdot 4^{2x} = 32$$

Inför $t = 4^{2x}$ (som är > 0 för alla x). Detta ger ekvationen

$$t^2+4t = 32 \iff (t+2)^2 = 36 \iff t = 4 \quad (\text{roten } t = -8 \text{ förkastas ty } t > 0).$$

Alltså är $4^{2x} = t = 4$ vilket är ekvivalent med att $x = 1/2$. En lösningskontroll görs genom insättning i den givna ekvationen.
Svar. $x = 1/2$

---

(3) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara den funktion som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{då } x \geq 0; \\ 2^{x/3}, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Visa att funktionen f är inverterbar. Bestäm också f^{-1}, skissera grafen $y = f^{-1}(x)$ och ange definitionsmängd och värdemängd till f^{-1}.

Lösning. På intervallet $x \geq 0$ ges f av $f(x) = x^2+1$, och där gäller att $f(x) \geq 1$ och att f är strängt växande. På intervallet $x < 0$ ges funktioen av $f(x) = 2^{x/3}$, och $f(x) < 1$ och strängt växande även på detta intervall.

Om $f(x_0) = y_0 \geq 1$ måste därför $x_0 > 0$, och eftersom f är strängt växande på $x \geq 0$ finns det bara ett sådant x_0. Och om $f(x_0) < 1$ måste $x_0 < 0$, och då f är stängt växande även på intervallet $x < 0$, finns det återigen bara ett sådant x_0. Alltså är f injektiv och därmed inverterbar på sin värdemängd V_f. Låt f^{-1} beteckna f:s invers.

Eftersom $f(x) > 0$ för alla x, och går mot 0 då $x \to -\infty$ och går mot $+\infty$ då $x \to +\infty$, är $V_f = (0, +\infty)$. Alltså är

$$D_{f^{-1}} = V_f = (0, +\infty) \quad \text{och} \quad V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, \infty).$$

För att bestämma $f^{-1}(y)$ löser vi ut x som funktion av y ur $y = f(x)$. Om $y \geq 1$ vet vi att $x \geq 0$ och vi får

$$y = x^2 + 1 \iff x = \sqrt{y-1}.$$

Om $y < 1$ är $x < 0$ och då får vi

$$y = 2^{x/3} \iff \log_2 y = \frac{x}{3} \iff x = 3\log_2 y.$$

Svar. f är inverterbar med invers

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, \text{för } x \geq 1; \\ 3\log_2 x, \text{för } 0 < x < 1. \end{cases} .$$

$D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ och $V_{f^{-1}} = (-\infty, \infty)$.

Del II

(4) a) Vilket är det minsta naturliga tal m som har både 126 och 770 som delare? (Det är detsamma som att fråga efter den minsta gemensamma nämnaren m vid addition av typen $\frac{a}{126} + \frac{b}{770}$.) (2p)

b) Vilket är det största naturliga tal som är en delare i både 126 och 770 ? (2p)

Lösning. Primfaktorisering ger

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

och

$$770 = 10 \cdot 77 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

.

Det minsta naturliga tal som har både 126 och 770 som delare (det vill säga deras Minsta Gemensamma Multipel MGM, som också är vad som kallas Minsta Gemensamma Nämnare MGN vid bråkräkning) är det minst tal som innehåller alla primfaktorer till varadera talet. Alltså är

$$MGM(126, 770) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 55 \cdot 126 = 9 \cdot 770 = 6930.$$

Den största gemensamma delaren SGD är det det tal som består av alla gemsamman primfaktorer,

$$SGD(126, 770) = 2 \cdot 7 = 14.$$

Svar. a) 6930 b) 14

---

(5) Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av $(e^x + e^{-2x})^6$.

Lösning. Binomialsatsen ger att

$$\left(e^x + e^{-2x}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (e^x)^{6-k} (e^{-2x})^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} e^{(6-3k)x}.$$

Den konstanta termen är den som inte beror på x, som fås får k sådant $6 - 3k = 0$, dvs $k = 2$. Den konstanta termen är alltså

$$\binom{6}{2} (e^x)^{6-2} (e^{-2x})^2 = \binom{6}{2} e^{4x} e^{-4x} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Svar. 15

---

(6) Antag att $0 \leq v \leq \pi$ och att $\cos v = 0.6$. Beräkna

a) $\sin(\frac{\pi}{2} - v)$ b) $\sin(-v)$ c) $\cos 2v$ d) $\cos \frac{v}{2}$

Varje deluppgift i uppgift 6 är värd 1 p.
Du får använda dig av att $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ och att $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. För att få full poäng måste du härleda alla övriga trigonometriska formler du använder dig av.

Lösning. Vi konstaterar först att $0 \leq v \leq \pi$ och att $\cos v = 0.6$ medför att $0 < v < \pi/2$ (ses från enhetscirkeln).

a) Med hjälp av lämplig figur över enhetscirkeln med vinklar u och $\pi - u$ markerade, ser man ur kongurenta trianglar att $\sin(\pi/2 - u) = \cos u$. Så alltså är

$$\sin(\frac{\pi}{2} - v) = \cos v = 0.6.$$

b) Om $0 < v < \pi/2$ är $-\pi/2 < -v < 0$ vilket medför att $\sin v < 0$. Trigonometriska ettan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ger då att

$$\sin v = -\sqrt{1 - \cos^2 v} = -\sqrt{1 - 0.36} = -\sqrt{0.64} = -0.8.$$

c)

$$\cos 2v = \cos(v - (-v)) = \{\text{enligt given formel}\} = \cos v \cos(-v) + \sin v \sin(-v).$$

Från enhetscirkeln fås att $\cos(-u) = \cos u$ och $\sin(-u) = -\sin u$ för alla u. Tillsammans med trigongometriska ettan och ovanstående ekavation ger detta

$$\cos 2v = \cos v \cos(-v) + \sin v \sin(-v) = \cos^2 v - \sin^2 v = 2\cos^2 v - 1 = 2 \cdot (0.6)^2 - 1 = -0.28.$$

d) Om v ersätts med $v/2$ fås på samma sätt som i c) att

$$\cos v = 2\cos^2 \frac{v}{2} - 1 \iff \cos^2 \frac{v}{2} = \frac{1 + \cos v}{2} = 0.8.$$

Eftersom $0 < v < \pi/2$ är $0 < v/2 < \pi/4$, så $\cos v/2 > 0$. Följaktligen är

$$\cos \frac{v}{2} = \sqrt{0.8}.$$

Svar. a) 0.6 b) -0.8 c) -0.28 d) $\sqrt{0.8}$

Del III

(7) Avgör vilka reella tal x som uppfyller olikheten

$$\left|x^2+2x+4\right| < |x-4|\,.$$

Lösning. Eftersom

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0, \quad \text{för alla reella } x$$

är $|x^2+2x+4|=x^2+2x+4$ för alla reella x.

Antag nu först $x \geq 4$, då är $|x-4|=x-4$ och given olikhet ekvivalent med

$$x^2+2x+4<x-4 \iff x^2+x+8<0 \iff (x+\frac{1}{2})^2+\frac{31}{4}<0,$$

vilket aldrig är uppfyllt eftersom vänster led är summan av en kvadrat och ett positivt tal. Alltså finns inga x i intervallet $x \geq 4$ som löser olikheten.

Antag nu istället att $x<4$, då är $|x-4|=4-x$ och given olikhet ekvivalent med

$$x^2+2x+4<4-x \iff x^2+3x<0 \iff x(x+3)<0.$$

Den sista olikheten är uppfylld då de två faktorerna x och $(x+3)$ har olika tecken, dvs då $-3<x<0$. Sådana x uppfyller också antagandet $x<4$.

Svar. $-3<x<0$

---

(8) Använd linjär approximation för att bestämma ett närmevärde till $\sqrt{24.8}$. Illustrera med en tydlig figur.

Lösning. Vi gör linjär approximation av funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ kring punkten $x=25$. Vi beräknar $f(25)=5$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ och $f'(25)=\dfrac{1}{2\sqrt{25}}=1/10$. Formeln för linjär approximation ger

$$\sqrt{24.8}=f(24.8)=f(25-0.2)\approx f(25)+f'(25)(-0.2)=5+\frac{1}{10}\left(\frac{-1}{5}\right)=5-\frac{1}{50}=\frac{249}{50}=4.98$$

Därtill en figur som visar grafen $y=\sqrt{x}$ kring $x=25$, samt tangentlinjen $y=L(x)=5+1/10(x-25)$ i $(25,5)$ och en förklaring som visar att den linjära approxiamtionen innebär $f(24.8)$ approximeras med $L(24.8)$.

Svar. 4.98

(9) Som bekant kan vi uttrycka naturliga tal i andra talbaser än bas 10, till exempel gäller att $(41)_{10} = (1112)_3$. (Detta behöver du inte visa.) Låt oss bestämma att den ledande siffran ska vara $\neq 0$, till exempel tillåter vi inte att talet "fyrtioett" skrivs som $(041)_{10}$ eller $(001112)_3$.

Vilket är då det största respektive minsta naturliga tal som i bas b kan skrivas med exakt n siffror?

Svaren ska uttryckas i bas 10 och förenklas så långt som möjligt.

Om du löser uppgift 9 korrekt i speciallfallet $b = 5$ och $n = 4$ får du 1 poäng. Om du löser uppgift 9 korrekt i det generella fallet får du 4 poäng.

Lösning.
Ett tal N som uttrycks med exakt n siffror i bas b har formen

$$N = (d_{n-1}d_{n-2}\dots d_1 d_0)_b = d_{n-1}b^{n-1}+d_{n-2}b^{n-2}+\cdots+d_1 b+d_0 = \sum_{k=0}^{n-1} d_k b^k$$

där varje siffra d_i är något av talen $0, 1, 2, \dots (b-1)$ för $0 \leq i \leq n-1$ och dessutom $d_{n-1} \neq 0$.

Det största värdet S fås genom att göra varje term så stor som möjligt, det vill säga att sätt alla $d_i = (b-1)$. Därmed blir S

$$S = ((b-1)(b-1)\dots(b-1))_b = \sum_{k=0}^{n-1}(b-1)b^k = (b-1)\sum_{k=0}^{n-1} b^k.$$

Summa i sista ledet är en geometrisk summa med första term $= 1$ och kvot $= b$ och kan förenklas till

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \frac{b^n - 1}{b-1}.$$

Alltså är det största talet

$$S = (b-1)\sum_{k=0}^{n-1} b^k = (b-1)\frac{b^n-1}{b-1} = b^n - 1.$$

Det minsta talet M som kan uttryckas med n siffror i bas b får vi genom att göra varje term så liten som möjligt, det vill säga vi sätter $d_i = 0$ för alla i, utom d_{n-1}, som ju inte fick vara $= 0$, och vi väljer därför $d_{n-1} = 1$. Alltså är

$$M = (100\dots0)_b = 1\cdot b^{n-1} + 0\cdot b^{n-2} + \cdots + 0\cdot b + 0 = b^{n-1}.$$

För speciallfallet $b = 5$ och $n = 4$ är de störst talet

$S = (4444)_5 = 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 + 4 = 624 = 5^4 - 1$

och det minst

$$M = (1000)_5 = 5^3 = 125.$$

Svar. Det största talet S som kan skrivas med n siffror i bas b är $S = b^n - 1$ ($= 5^4 - 1 = 624$ om $b = 5$ och $n = 4$).

Det minsta talet M är $M = b^{n-1}$ ($= 5^3 = 125$ om $b = 5$ och $n = 4$).