

Fasförskjuten cosinus

Jonas Beskow

5 november 2013

Två fasförskjutna cosinusvågor med samma frekvens summeras, vilket resulterar i en ny cosinusvåg. Vad blir den nya vågens amplitud och fasförskjutning? D.v.s. vad är A och ϕ i nedanstående uttryck?

$$\cos \omega t + \cos \omega(t + \tau) = A \cos \omega(t + \phi)$$

Alternativ 1

Skriv om med hjälp av Euler: $\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + \frac{e^{j\omega(t+\tau)} + e^{-j\omega(t+\tau)}}{2} &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega t} e^{-j\omega\tau}}{2} \\ &= \frac{e^{j\omega t}(1 + e^{j\omega\tau}) + e^{-j\omega t}(1 + e^{-j\omega\tau})}{2} \end{aligned}$$

Men $1 + e^{j\alpha} = e^{j\alpha/2}(e^{-j\alpha/2} + e^{j\alpha/2})$ vilket gör att vi kan skriva summan som

$$\frac{e^{j\omega t} e^{j\omega\tau/2} (e^{-j\omega\tau/2} + e^{j\omega\tau/2}) + e^{-j\omega t} e^{-j\omega\tau/2} (e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega\tau/2})}{2}$$

Bryt ut parenteserna och använd Euler åt andra hållet:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega\tau}{2} (e^{j\omega t} e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega t} e^{-j\omega\tau/2}) \\ = \cos \frac{\omega\tau}{2} (e^{j\omega(t+\tau/2)} + e^{-j\omega(t+\tau/2)}) \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega(t + \frac{\tau}{2})$$

vilket via identifiering ger

$$A = 2 \cos \frac{\omega\tau}{2}$$

och

$$\phi = \frac{\tau}{2}$$

Alternativ 2

Betrakta varje cosinus-funktion som projektionen av en cirkelrörelse i komplexa talplanet, dvs $\cos \alpha = \Re(e^{j\alpha})$ (Realdelen av $e^{j\alpha}$). På slutet tar vi realdelen för att få tillbaka reell cosinusform:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} + e^{j\omega(t+\tau)} &= e^{j\omega t} + e^{j\omega t} e^{j\omega\tau} \\ &= e^{j\omega t} e^{j\omega\frac{\tau}{2}} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) = e^{j\omega t + j\omega\frac{\tau}{2}} 2 \cos \omega\frac{\tau}{2} \end{aligned}$$

Slutligen, ta realdelen av ovanstående för att få resultatet:

$$2 \cos(t + \frac{\omega\tau}{2}) \cos \frac{\omega\tau}{2}$$