

Spektrala Transformer

Tidsdiskreta signaler,
kvantisering & sampling

Tidsdiskreta signaler

Tidskontinuerlig signal

Ex: $x(t) = \sin(\omega t)$

t är ett reellt tal

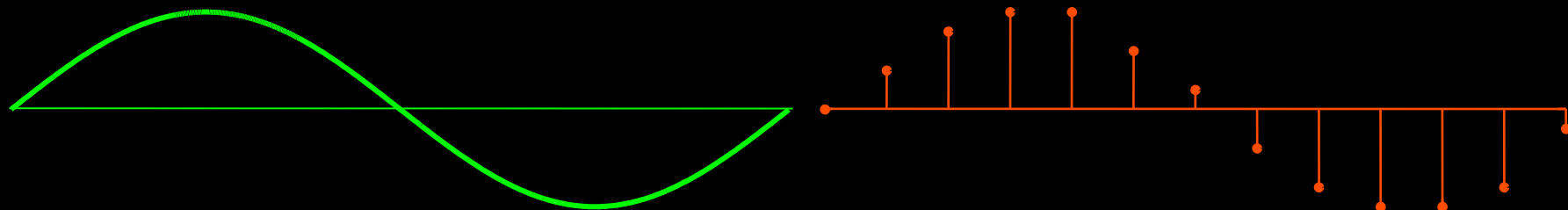
ω har enheten rad/s

Tidsdiskret signal

Ex: $x(n) = \sin(\omega n)$

n är ett heltal

*ω har enheten rad/
sampel*

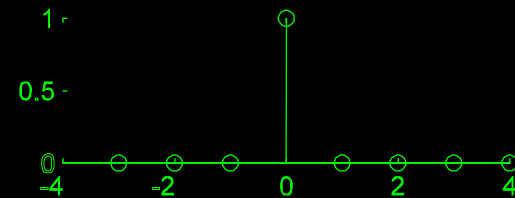


Tidsdiskreta signaler, forts.

Några speciella funktioner

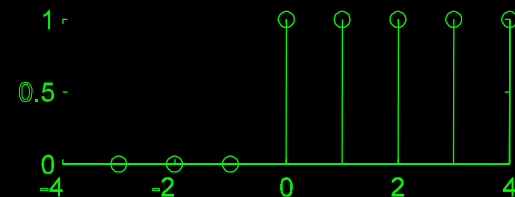
Deltafunktion, impuls

$$\delta(n)$$



Stegfunktion

$$u(n)$$

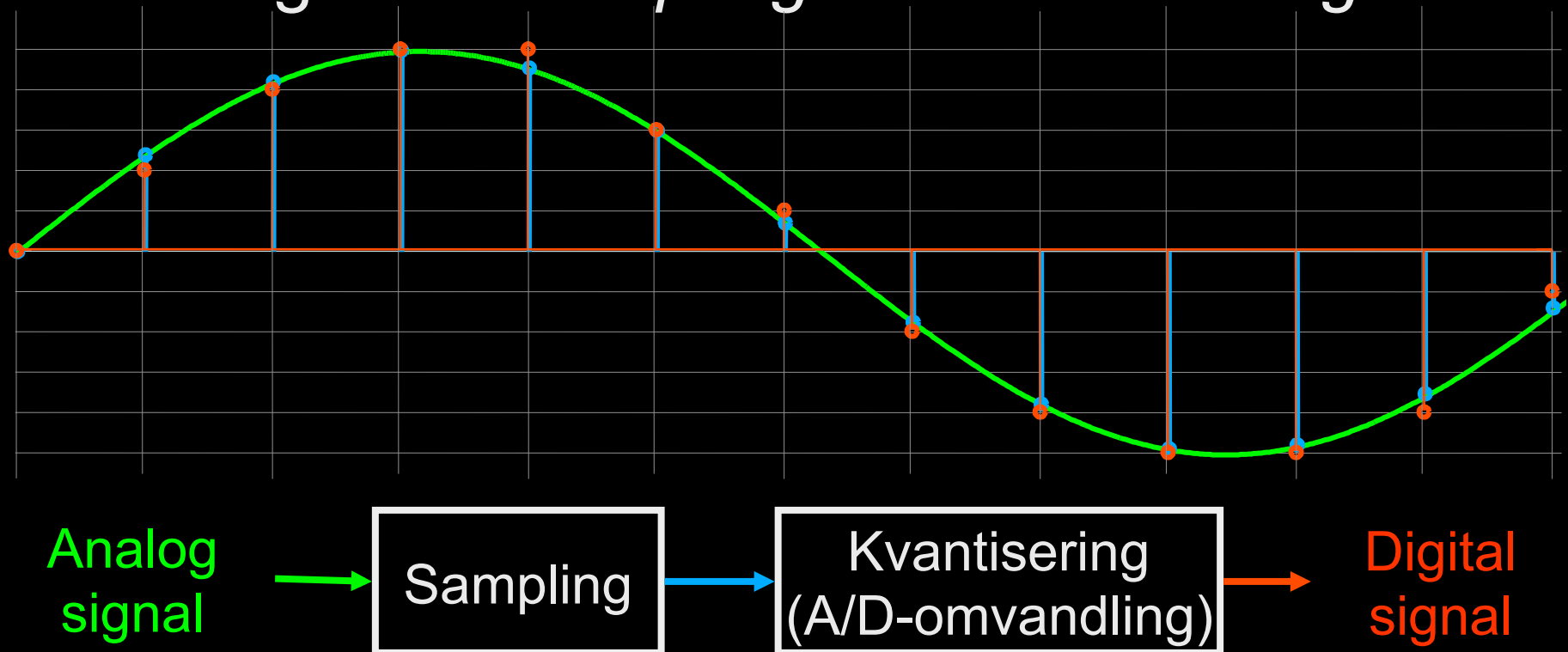


Digitalisering

- En dator kan inte representera analoga signaler
- För att kunna behandla verkliga signaler i en dator måste de *digitaliseras* (*digitize*)
- Denna process påverkar signalens informationsinnehåll på flera sätt
- Vi behöver kunna beskriva och modellera *hur* signalen påverkas

Digitalisering (forts.)

- Digitaliseringen påverkar signalen på två sätt: genom *sampling* och *kvantisering*



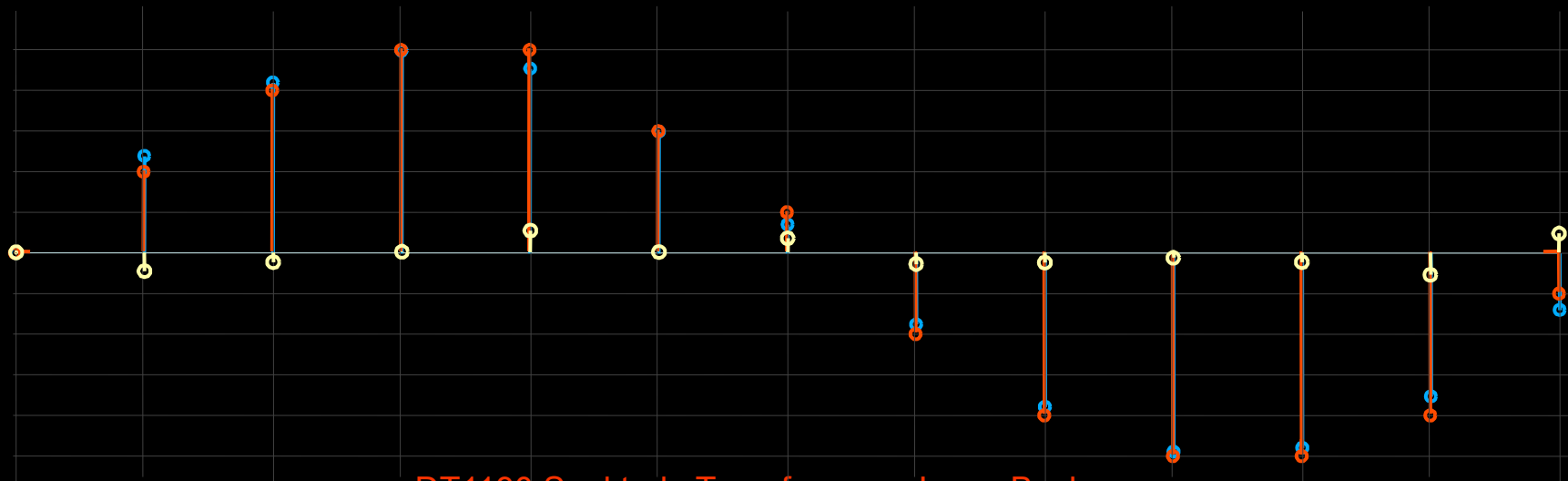
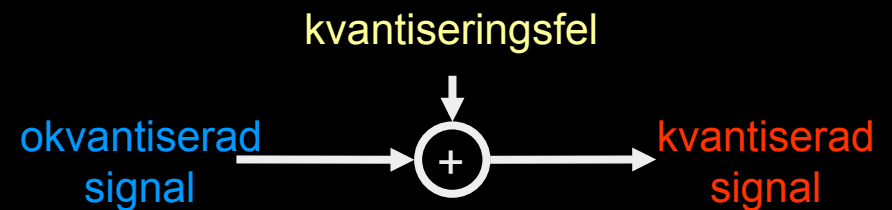
Kvantisering

- För att kunna representera ett analogt värde, t.ex. en spänning, i datorn måste det beskrivas med ett begränsat antal (B) bitar
- Vi delar in intervallet i 2^B lika steg
- Värdet representeras av ett heltal mellan -2^{B-1} och $2^{B-1} - 1$

Exempel: $B = 8$ ger $[-128, 127]$

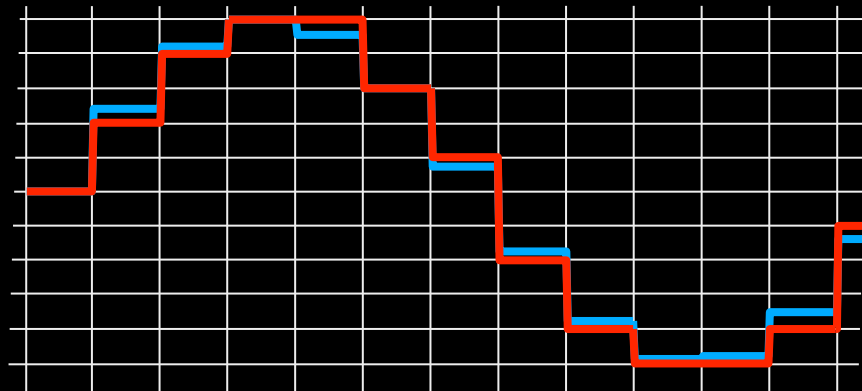
Kvantiseringsfel

- Kvantisering introducerar ett fel som är okorrelerat med insignalen
- Kan ses som additivt brus



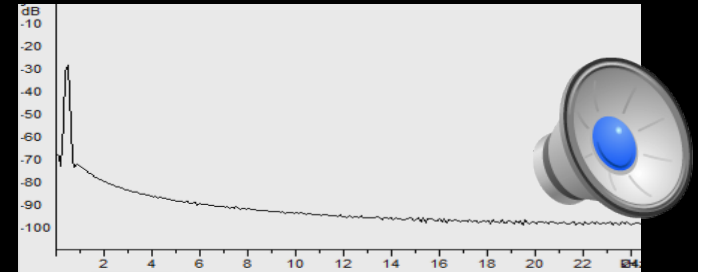
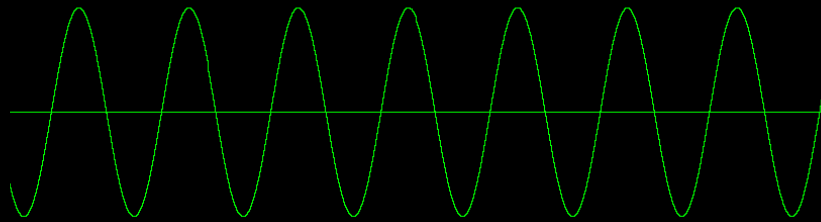
Kvantiseringsfel (forts.)

- Likformigt fördelat på intervallet $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Medelfelet (RMS) = $\sqrt{\frac{1}{12}}$ = 0.2887

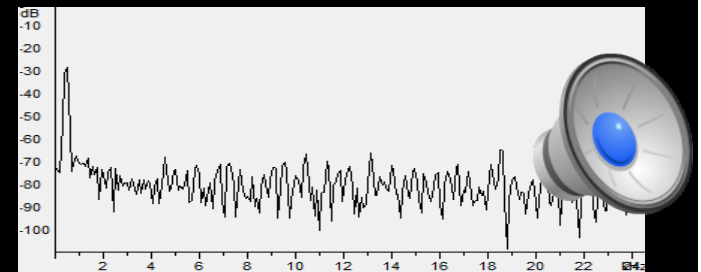
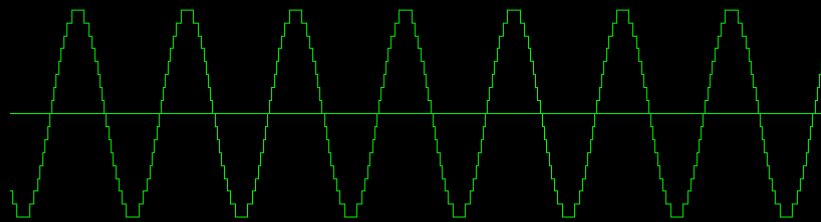


Kvantisering - exempel

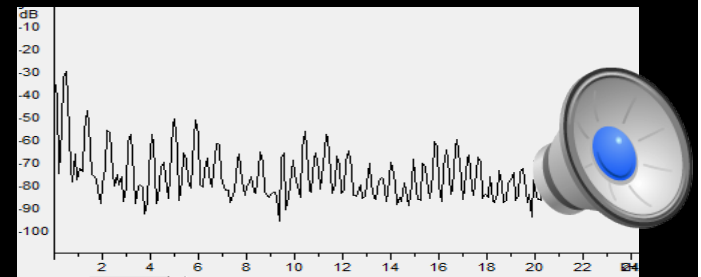
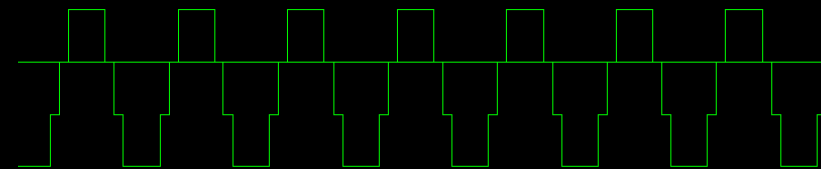
8 bitar



4 bitar



2 bitar



Signal/brus-förhållande (SNR)

- Absoluta felnivån är ofta ointressant
- Kvoten mellan signalens och brusets effekter kallas *SNR* (*Signal-to-Noise-Ratio*)
- *Effekt* $\sim$ *amplitud*²
- $P_{\text{signal}} \sim (2^{B-1})^2 = 2^{2(B-1)} = 2^{2B}/4$
- $P_{\text{brus}} \sim 1/12$
- $SNR = 3 \cdot 2^{2B}$
- Uttrycks ofta i dB

Decibel (dB)

- Logaritmisk skala, motsvarar hur örat uppfattar ljudnivå
- Uttrycker *förhållandet* mellan två nivåer
för amplituder: $20 \log_{10}(A_2/A_1)$
för effekter: $10 \log_{10}(P_2/P_1)$

Exempel: En dubblering av amplituden

$$20 \log_{10}(2) = 20 \cdot 0.3 = 6\text{dB}$$

eller

$$10 \log_{10}(2^2) = 10 \cdot 0.6 = 6\text{dB}$$

SNR, dB och dynamiskt omfång

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 10\log_{10}(3 \cdot 2^{2B}) \\ &= 4.77 + B \cdot 6.02 \end{aligned}$$

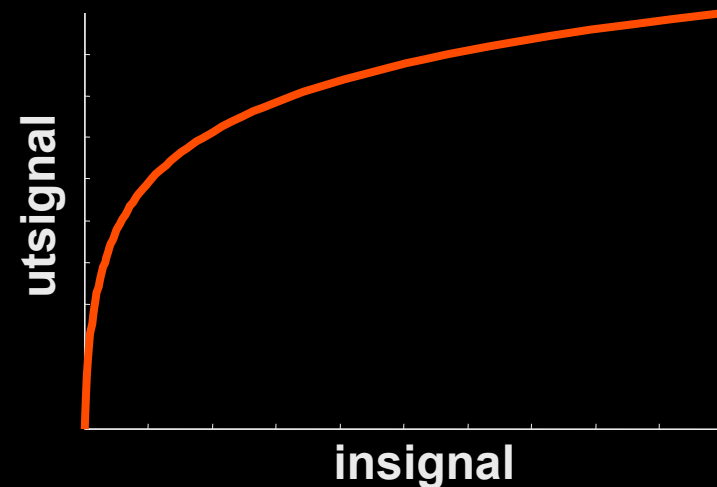
Varje bit ger ca 6 dB

<i>B</i>	<i>SNR</i>	<i>dB SPL</i>	<i>Exempel</i>
8	52.9 dB	140	Jetplan
16	101.1 dB	120	Rockkonsert
24	149.3 dB	100	Skrik
		80	Trafikerad gata
		70	Normal konversation
		50	Tyst konversation
		30	Viskning
		20	Landsbygdsnatt

Olinjär kvantisering

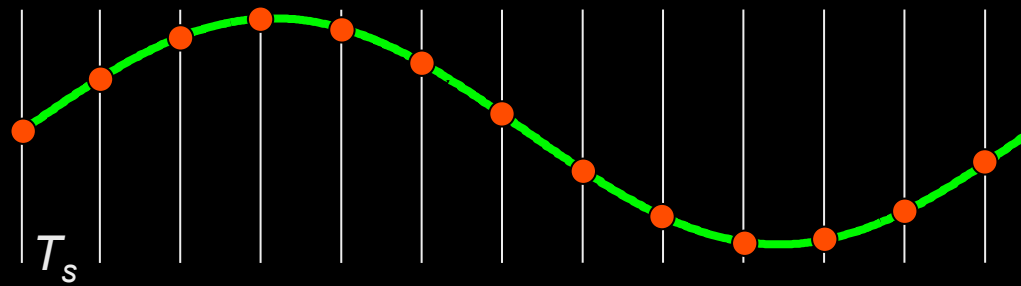
- Trick för att öka det dynamiska omfånget utan att öka antalet bitar
- Små kvantiseringssteg vid små signalnivåer, stora steg vid höga nivåer
- Används i telenätet

exempel: μ -law



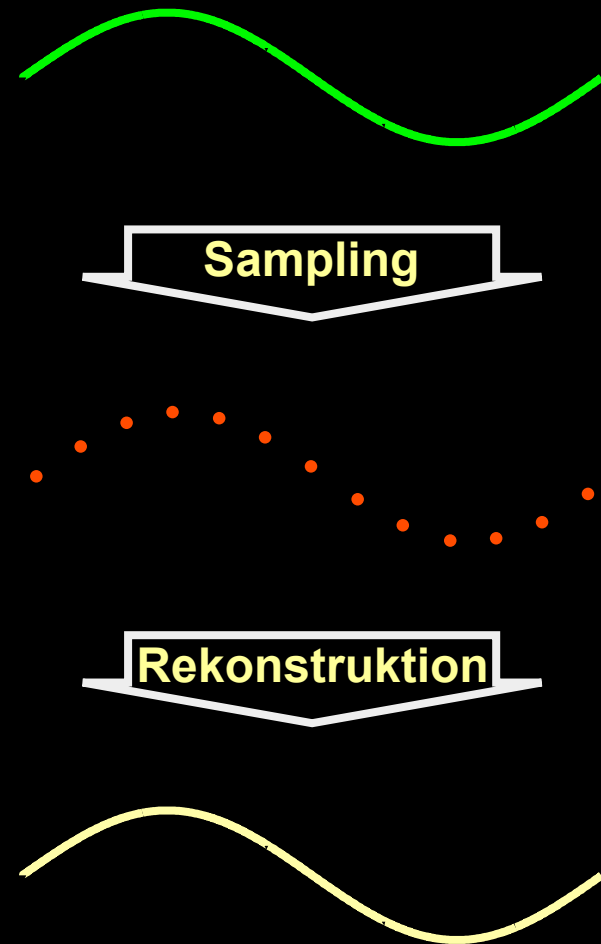
Sampling

- Ta ett värde, ett sampel, av signalen vid jämna tidsintervall T_s
- $f_s = 1/T_s$ kallas samplingsfrekvensen eller samplingshastigheten (sampling frequency, sampling rate)
- Vad är ett bra värde på f_s ?

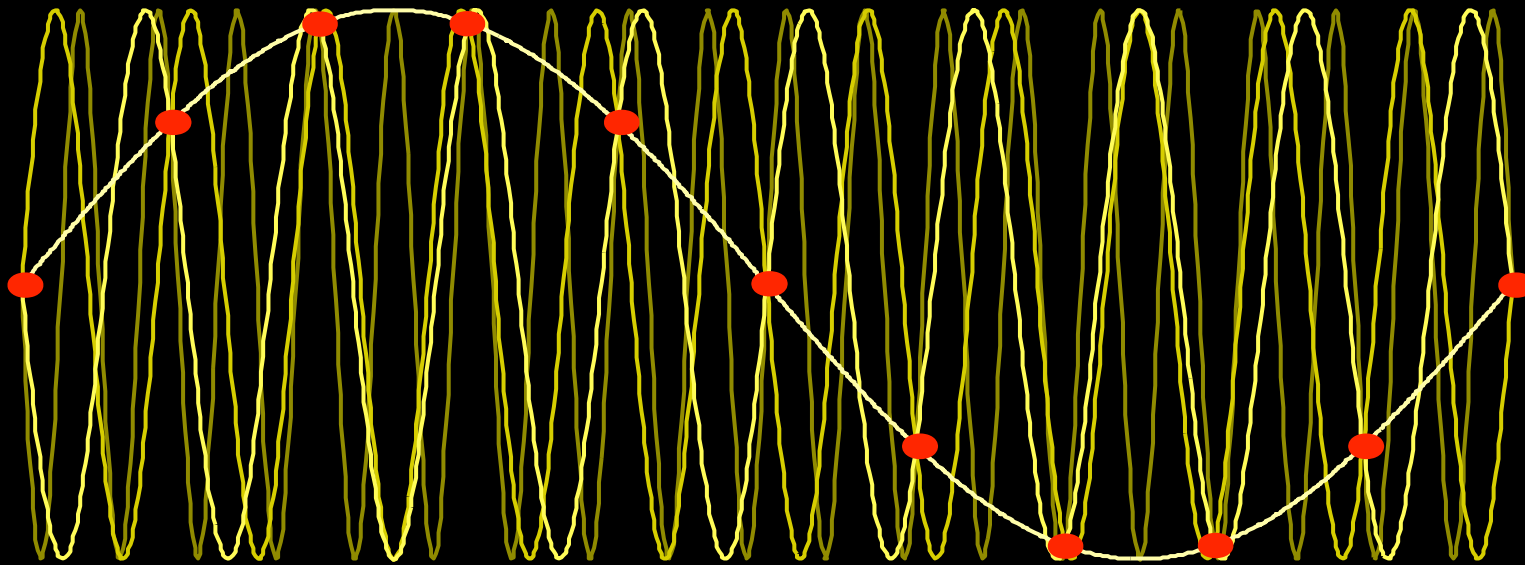


Kriterium för "korrekt" sampling

Att kunna exakt
rekonstruera den
ursprungliga
insignalen ur den
samplade signalen



Sampling av sinusvåg



- Samplar vi *en* sinusvåg, så finns det ett *oändligt antal* sinusvågor som ger *exakt samma* sampelpunkter!
- Fenomenet kallas *aliasing* eller *vikning*

Samplingsteoremet

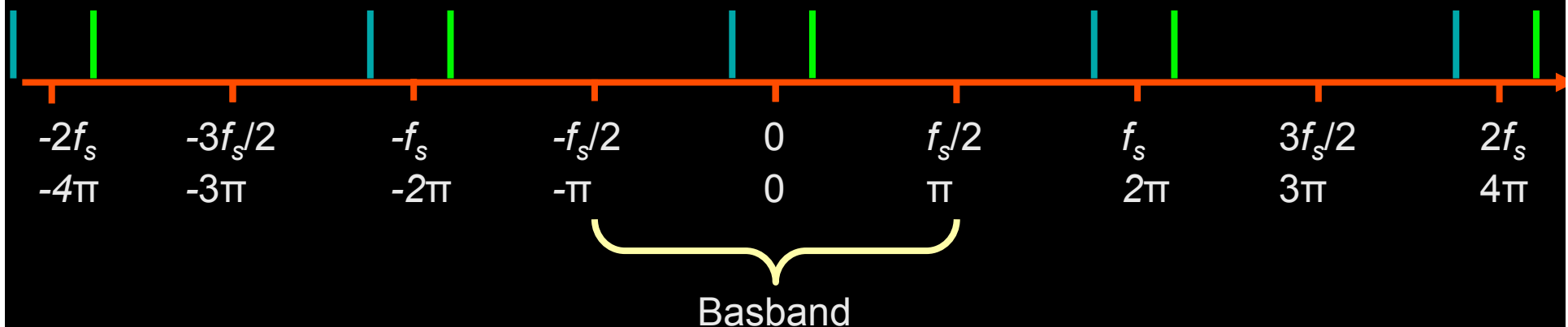
En signal kan samplas korrekt om den inte innehåller frekvenser över halva samplingsfrekvensen

Kallas även *Nyquists samplingsteorem*

$f_s/2$ kallas ofta *Nyquistfrekvensen*

Aliasing / Vikning

- Frekvensspektrum speglas i alla multiplar av nykvistfrekvensen $f_s/2$
- Frekvensområdet $[-f_s/2, f_s/2]$ eller $[\pi, -\pi]$ kallas basbandet

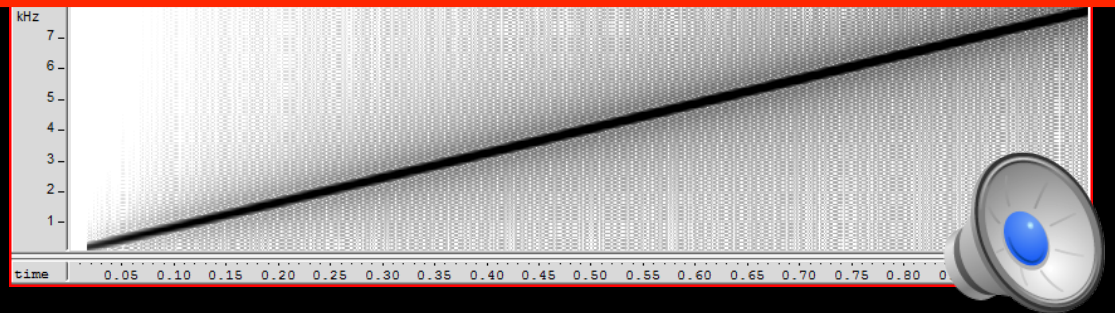


Vikning - exempel

Sinussvep 0 - 8000 Hz

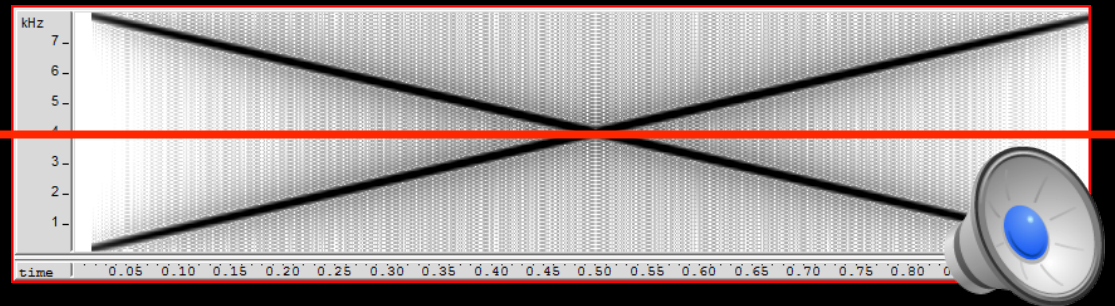
$fs/2$

$fs = 16000$ Hz



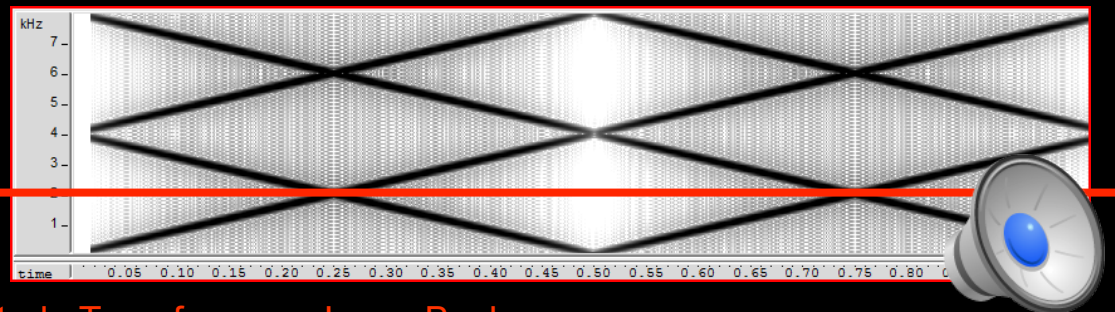
$fs = 8000$ Hz

$fs/2$



$fs = 4000$ Hz

$fs/2$



Spatial aliasing



Korrekt samplad



Felaktigt samplad (Moiré-mönster)

DT1130 Spektrala Transformer • Jonas Beskow

Källa: wikipedia

Att undvika aliasing

- Insignalen måste bandbegränsas – alla frekvenskomponenter $> f_s/2$ måste bort
- Detta görs med ett lågpassfilter
- Kallas för anti-vikningsfilter eller anti-aliasing filter
- Filtreringen görs typiskt med analog elektronik
- Alternativt så samplar man med "för hög" frekvens och reducerar samplingsfrekvensen med ett digitalt filter, som kan göras mycket effektivt

Att byta samplingsfrekvens

- Nersampling (minska f_s med faktor N)
 - Lågpasstrering vid nya $f_s/2$
 - Plocka ut vart N :te sampel
- Uppsampling (öka f_s med faktor M)
 - Skjut in $M-1$ nollor mellan varje sampel
 - Lågpasstrering vid nya $f_s/2$
- Omsampling (ändra f_s med faktor M/N)
 - Sampla först upp, sedan ned.

Sammanfattning

- Sampling och kvantisering introducerar fel av olika karaktär
 - Kvantisering adderar brus till signalen
 - Inkorrekt sampling kan introducera "falska" frekvenser
- Det är signalens dynamiska omfång som avgör lämplig kvantiseringsgrad
- Signalens frekvensinnehåll bestämmer samplingsfrekvens