KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdagen den 9 juni, 2011

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 2, 2010 och period 3, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = c \end{cases}$$

där c är en konstant och x, y och z är de tre obekanta.

(a) Visa att det inte finns någon lösning till ekvationssystemet om $c = 2$. **(2)**

(b) Bestäm det värde på konstanten c som gör att systemet har minst en lösning och ange lösningsmängden i detta fall. **(2)**

(2) (a) Definiera vad det betyder att tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende. **(1)**

(b) Avgör om följande tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, -2, -1) \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = (1, -4, 4, -1).$$

(2)

(c) Bestäm en bas till det underrum (delrum) i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de tre ovanstående vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

(3) Betrakta den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ är egenvektorer till A och ange motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Eftersom matrisen är symmetrisk kommer också $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ att vara en egenvektor. Kontrollera detta och använd det för att hitta en basbytesmatris P sådan att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris. **(2)**

DEL B

(4) Två plan i rummet sägs skära varandra under rät vinkel om deras normalvektorer är ortogonala mot varandra. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller linjen $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t \cdot (1, 3, 1)$ och som skär planet med ekvation $2x + z - 3 = 0$ under rät vinkel. **(4)**

(5) Man vill använda minsta-kvadratmetoden för att uppskatta parametrarna i en modell där en storhet z beror på storheterna x och y enligt $z = f(x, y) = ax + by + c$. Efter nio mätningar har man följande tabell av mätvärden:

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	0	1	2	0	1	2
z	-5	-3	1	-4	-2	1	-1	1	4

Tre olika ingenjörer har angripit problemet och kommit fram till tre olika lösningar. Ingenjör A säger att det bästa valet är $(a, b, c) = (3, 3, -7)$, Ingenjör B talar för $(a, b, c) = (2, 3, -6)$ och Ingenjör C för $(2, 2, -5)$.

(a) Vilken av ingenjörerna har lyckats bäst i minsta-kvadratmening? **(2)**

(b) Har någon av dem räknat fram den korrekta minsta-kvadratlösningen? **(2)**

(6) Vi har att $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ är en bas för ett underrum V i $\mathbb{R}^5$. Vi har två vektorer $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ i V som tillsammans med $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ uppfyller relationerna

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{g}_2, \\ 2\mathbf{f}_2 - 4\mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_1. \end{cases}$$

(a) Visa att $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ också bildar en bas för V. **(2)**

(b) Bestäm koordinaterna till vektorn $2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2$ i basen $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$. **(2)**

Var god vänd!

DEL C

(7) Låt V vara det tvådimensionella delrum av $\mathbb{R}^4$ som utgör lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Den ortogonala projektionen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$ är en linjär avbildning och kan beskrivas med hjälp av en matris om vi väljer en bas för domänen $\mathbb{R}^4$ och en bas för målrummet V. För $\mathbb{R}^4$ är det naturligt att välja standardbasen, men det går också att välja andra baser.

(a) Bestäm en ortogonal bas B för V **(2)**

(b) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på någon vald bas för $\mathbb{R}^4$ och basen B för V. **(2)**

(8) Låt $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ vara enhetssfären i det tredimensionlla rummet $\mathbb{R}^3$. En *storcirkel* på S är skärningen mellan S och ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. Låt P vara en given punkt på sfären S.

(a) Låt Q vara en annan punkt på sfären. Visa att det alltid finns minst en storcirkel genom P och Q. **(2)**

(b) Bestäm de punkter, Q, på sfären sådana att det finns en *unik* storcirkel genom P och Q. **(2)**

(9) Om vi har en triangel med hörn i punkterna A, B och C i $\mathbb{R}^3$ är det intressant inom datorgrafik att avgöra om en ljusstråle från origo, O, till en punkt P passerar utanför triangeln, eller fångas upp av triangeln.

(a) Om triangeln inte ligger i ett plan genom origo kan vi byta bas till $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, där $\mathbf{u} = \overline{OA}$, $\mathbf{v} = \overline{OB}$ och $\mathbf{w} = \overline{OC}$. När vi uttrycker vektorn $\overline{OP}$ i denna bas kan vi se på koordinaterna ifall linjen genom O och P går genom triangeln. Hur? **(1)**

(b) Vi kan också se på dessa koordinater om P ligger på samma sida om triangeln som O, i vilket fall strålen ändå når till P utan att träffa triangeln. Hur? **(1)**

(c) Illustrera metoden ovan genom att utföra räkningarna för triangeln med hörn i $A = (5, 5, 0)$, $B = (5, 0, 5)$ och $C = (0, 5, 5)$ och de tre punkterna $P_1 = (3, 5, 3)$, $P_2 = (3, 6, 2)$ och $P_3 = (2, 4, 3)$. **(2)**