

Sampling av phasor

Jonas Beskow

11 november 2013

Hur uppstår vikning (eng. *aliasing*), rent matematiskt? Vi undersöker detta genom att sampla en tidskontinuerlig fasvektor, (eng. *phasor*). Fasvektorn beskrivs av följande funktion:

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

Funktionen samplas med samplingsperioden T_s genom att substituera

$$t = T_s n$$

Detta ger oss

$$x(n) = e^{j\omega T_s n}$$

Vi kan nu, utan att förändra något multiplicera funktionen med 1. Ett annat (lite lyxigare) sätt att skriva 1 är $e^{j2\pi nk}$, där n och k är heltal. $e^{j2\pi nk}$ beskriver ju bara en komplex vektor av längden ett där vinkeln är en multipel av 2π . Den vektorn kommer alltid vara = 1. Detta ger

$$x(n) = e^{j\omega T_s n} e^{j2\pi nk} = e^{j(\omega T_s n + 2\pi kn)}$$

Skriv om samplingsperioden med hjälp av samplingsvinkelfrekvensen ω_s :

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Detta ger

$$e^{\frac{j2\pi n}{\omega_s}(\omega + k\omega_s)}$$

Tolkning

Vi har en samling kontinuerliga signaler, nämligen phasors med vinkelfrekvenserna ω , $\omega + \omega_s$, $\omega + 2\omega_s$... osv. som alla resulterar i samma sampelpunkter $x(n)$. Dvs: samplar vi med vinkelfrekvensen ω_s kan vi inte skilja på signaler med frekvensen ω och ω plus en multipel av samplingshastigheten ω_s .

ω - rad/s eller rad/sampel?

För kontinuerliga signaler är enheten för vinkelfrekvens ω som *radianer per sekund*. För samplade signaler använder man också ω för att ange vinkelfrekvensen, men då är enheten *radianer per sampel*. Dvs en samplad phasor kan skrivas

$$x(n) = e^{j\omega_{diskret}n}$$

och en tidskontinuerlig

$$x(t) = e^{j\omega_{kont}t}$$

. Sambandet mellan vinkelfrekvenserna är då

$$\omega_{diskret} = \frac{\omega_{kont}}{f_s} = \frac{2\pi f_{kont}}{f_s} = \frac{2\pi\omega_{kont}}{\omega_s}$$