KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2011-06-09

Del A

(1) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = c \end{cases}$$

där c är en konstant och x, y och z är de tre obekanta.

(a) Visa att det inte finns någon lösning till ekvationssystemet om $c = 2$. **(2)**

(b) Bestäm det värde på konstanten c som gör att systemet har minst en lösning och ange lösningsmängden i detta fall. **(2)**

Lösning. (a) Totalmatrisen till ekvationssystemet är

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & c \end{array}\right].$$

När vi utför Gausselimination på matrisen får vi i de första stegen:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & -2 \\ 0 & 5 & 9 & c-6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & c-4 \end{array}\right].$$

Det är nu klart att ekvationssystemet inte har någon lösning om $c \neq 4$, och speciellt har ekvationssystemet ingen lösning med $c = 2$.

(b) Av beräkningarna ovan har vi att ett nödvändigt krav på konstanten c är $c = 4$. När vi sätter in $c = 4$ och fullföljer Gausseliminationen får vi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{5}r_2 \\ \frac{1}{5}r_2 \\ r_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Detta ger att $z = t$, där t är en reell parameter, och att $y = -\frac{2}{5} - \frac{9}{5}t$ och att $x = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}t$. Lösningsmängden kan beskrivas som

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{5} + 11t, -\frac{2}{5} - 9t, 5t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Svar:

(b) Systemet har lösningar bara om $c = 4$ och då kan dessa skrivas som $(x, y, z) = \left(\frac{8}{5} + 11t, -\frac{2}{5} - 9t, 5t\right)$ för en reell parameter t.

(2) (a) Definiera vad det betyder att tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende. **(1)**

(b) Avgör om följande tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, -2, -1) \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = (1, -4, 4, -1).$$

(2)

(c) Bestäm en bas till det underrum (delrum) i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de tre ovanstående vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

Lösning. (a) De tre vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ sägs vara *linjärt oberoende* om den enda lösningen till

$$x_1 \cdot \mathbf{u} + x_2 \cdot \mathbf{v} + x_3 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

är $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Om det däremot finns en lösning där inte alla de tre talen x_1, x_2 och x_3 är noll, så sägs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara *linjärt beroende*.

(b) Nu ska avgöras om

$$x_1 \cdot (1, -1,\ 1, -1) + x_2 \cdot (1,\ 2, -2, -1) + x_3 \cdot (1, -4,\ 4, -1) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

har några andra lösningar än $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Detta är ett linjärt ekvationssystem, i x_1, x_2 och x_3, med totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

och med hjälp av Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 + r_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ \frac{1}{3}r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Den fullständiga lösningen till detta system erhålls genom att sätta den *fria* variabeln x_3 till ett godtyckligt tal t och sedan uttrycka de båda *bundna* variablerna x_1 och x_2 (*trappstegsvariablerna'*) i t. Detta ger att $(x_1, x_2, x_3) = (-2t, t, t) = t \cdot (-2, 1, 1)$. Med exempelvis $t = 1$ blir $(x_1, x_2, x_3) = (-2, 1, 1)$, vilket betyder att $-2 \cdot \mathbf{u} + 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}$ och slutsatsen blir att $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt beroende.

(c) En godtycklig vektor $\mathbf{y}$ i det underrum M som spänns upp av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ kan skrivas på formen $\mathbf{y} = x_1 \cdot \mathbf{u} + x_2 \cdot \mathbf{v} + x_3 \cdot \mathbf{w}$, för några tal x_1, x_2 och x_3, dvs som en linjärkombination av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

Men eftersom, enligt (b)-uppgiften, $\mathbf{w} = -2 \cdot \mathbf{u} + 1 \cdot \mathbf{v}$, så får vi att

$$\mathbf{y} = (x_1 - 2x_3) \cdot \mathbf{u} + (x_2 + x_3) \cdot \mathbf{v},$$

dvs en linjärkombination av enbart $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Det innebär att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp det aktuella underrummet M.
Dessutom är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ linjärt oberoende, eftersom två vektorer som inte är parallella, och där ingen av dem är nollvektorn, är linjärt oberoende
Vi har alltså $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ dels spänner upp M, dels är linjärt oberoende. Därmed utgör de en bas till det aktuella underrummet M.

$\square$

Svar:
(b) De tre vektorerna är linjärt beroende.
(c) De två vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ utgör en bas för V.

(3) Betrakta den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ är egenvektorer till A och ange motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Eftersom matrisen är symmetrisk kommer också $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ att vara en egenvektor. Kontrollera detta och använd det för att hitta en basbytesmatris P sådan att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris. **(2)**

Lösning. (a) Vi har

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -36 \\ 36 \end{bmatrix} = 18\mathbf{u}$$

och

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \mathbf{v}$$

så $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer med egenvärdena 18 respektive 0.

(b) Vi beräknar kryssprodukten

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (1, -2, 2) \times (-2, 1, 2) \\ &= (-2 \cdot 2 - 2 \cdot 1, 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) = (-6, -6, -3). \end{aligned}$$

För att kontrollera att detta är en egenvektor kan vi dela med den gemensamma faktorn -3 och får med $\mathbf{w} = (2, 2, 1)$ att

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -18 \\ -9 \end{bmatrix} = (-9) \cdot \mathbf{w}.$$

vilket verifierar att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärde -9. Vi har nu tre egenvektorer med olika egenvärden och dessa bildar därmed en bas för $\mathbb{R}^3$ och använder vi dem som kolonner i basbytesmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

så vet vi att vi ska få

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

utan att behöva utföra invertering och matrismultiplikationer.

$\square$

Svar:

(a) $\mathbf{u}$ är en genevektor med egenvärde 18 och $\mathbf{v}$ är en egenvektor med egenvärde 0.

(b) En basbytesmatris som diagonaliserar A ges av

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

DEL B

(4) Två plan i rummet sägs skära varandra under rät vinkel om deras normalvektorer är ortogonala mot varandra. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller linjen $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t \cdot (1, 3, 1)$ och som skär planet med ekvation $2x + z - 3 = 0$ under rät vinkel. **(4)**

Lösning. Vi ansätter ekvationen $ax + by + cz = d$ för vårt sökta plan, där vi alltså ska bestämma konstanterna a, b, c och d. En normalvektor till detta plan är vektorn (a, b, c).

Denna normalvektor (a, b, c) måste dels vara ortogonal mot normalvektorn $(2, 0, 1)$ till det plan som vårt sökta plan enligt uppgiften skär under rät vinkel, dels vara ortogonal mot riktningsvektorn $(1, 3, 1)$ till den linje som vårt plan enligt uppgiften innehåller. En normalvektor (a, b, c) till vårt sökta plan kan därför bestämmas med hjälp av kryssprodukt:

$$(a, b, c) = (2, 0, 1) \times (1, 3, 1) = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = (-3, -1, 6).$$

Det återstår att bestämma konstanten d svarande mot denna normalvektor. Eftersom vi enligt uppgiften vet att vårt sökta plan innehåller punkten $(2, 1, 0)$ (som ligger på den givna linjen), så får vi att $d = -3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = -7$.

En ekvation för vårt plan är alltså

$$-3x - y + 6z = -7.$$

□

Svar: En ekvation för det sökta planet ges av $-3x - y + 6z = -7$.

(5) Man vill använda minsta-kvadratmetoden för att uppskatta parametrarna i en modell där en storhet z beror på storheterna x och y enligt $z = f(x, y) = ax + by + c$. Efter nio mätningar har man följande tabell av mätvärden:

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	0	1	2	0	1	2
z	-5	-3	1	-4	-2	1	-1	1	4

Tre olika ingenjörer har angripit problemet och kommit fram till tre olika lösningar. Ingenjör A säger att det bästa valet är $(a, b, c) = (3, 3, -7)$, Ingenjör B talar för $(a, b, c) = (2, 3, -6)$ och Ingenjör C för $(2, 2, -5)$.

(a) Vilken av ingenjörerna har lyckats bäst i minsta-kvadratmening? **(2)**

(b) Har någon av dem räknat fram den korrekta minsta-kvadratlösningen? **(2)**

Lösning. (a) Vi ställer upp problemet som ett överbestämt linjärt ekvationssystem i de tre obekanta, a, b och c.

$$\begin{cases} & & & & c & = & -5 \\ & & b & + & c & = & -3 \\ & & 2b & + & c & = & 1 \\ a & & & + & c & = & -4 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ a & + & 2b & + & c & = & 1 \\ 2a & & & + & c & = & -1 \\ 2a & + & b & + & c & = & 1 \\ 2a & + & 2b & + & c & = & 4 \end{cases}$$

Om vi sätter in de tre ingenjörerenas resultat i vänsterledet får vi vektorerna $(-7, -4, -1, -4, -1, 2$
$(-6, -3, 0, -4, -1, 2, -2, 1, 5)$ respektive $(-5, -3, -1, -3, -1, 1, -1, 1, 3)$.
Skillnadsvektorerna mellan vänsterled och högerled blir $(2, 1, 2, 0, -1, -1, 0, -1, -1)$, $(1, 0, 1, 0, -1, -1, 1, 0, 0)$ respektive $(0, 0, 2, -1, -1, 0, 0, 0, 1)$. I minsta-kvadratmetoden handlar det om att minimera längden av denna skillnadvektor, som för de tre ingenjörerna blir $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$ och $\sqrt{7}$. Alltså är det Ingenjör B som kommit närmast.

(b) Den minsta-kvadratlösningen ges av de värden på parametrarna som ger kortaste skillnadsvektor mellan vänsterled och högerled. Detta händer när denna vektor är ortogonal mot kolonnrummet till koefficientmatrisen, vilket framgår av *normalekvationen* $A^\mathsf{T}A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{b}$. I vårt fall får vi

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 15 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^\mathsf{T}A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Eftersom Ingenjör B gav bäst parametrar enligt del (a) räcker det att kolla dessa värden. När vi sätter in desssa parametrar i vänsterledet i normalekvationen får vi

$$\begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 15 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Alltså är det ingen som har fått en lösning till normalekvationen.

□

Svar:

(a) Ingenjör B kom närmast.

(b) Ingen av dem hade den korrekta minsta-kvadratlösningen.

(6) Vi har att $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ är en bas för ett underrum V i $\mathbb{R}^5$. Vi har två vektorer $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ i V som tillsammans med $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ uppfyller relationerna

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{g}_2, \\ 2\mathbf{f}_2 - 4\mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_1. \end{cases}$$

(a) Visa att $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ också bildar en bas för V. **(2)**

(b) Bestäm koordinaterna till vektorn $2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2$ i basen $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$. **(2)**

Lösning. (a) Av de givna relationerna har vi att $\mathbf{f}_1 = -2\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2$ och att

$$\mathbf{f}_2 = 2\mathbf{g}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{g}_1 + \frac{1}{2}(-2\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{g}_2.$$

Vi har att $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ är en bas för vektorrummet V. Detta betyder att varje vektor i V kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. Av relationerna ovan kan $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$. Detta betyder att det linjära höljet

$$\text{Span}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = V.$$

Vi har att dimensionen till V är två, vilket medför att $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ måste vara linjärt oberoende. Med andra ord är $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ en bas för V.

(b) Från relationerna ovan har vi att

$$2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2 = 2(-2\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2) - 5(\mathbf{g}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{g}_2) = -9\mathbf{g}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{g}_2.$$

Detta betyder att koordinatmatrisen till $2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2$ i basen $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ är

$$\begin{bmatrix} -9 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(b) Koordinaterna för vektorn $2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2$ är $(-9, -3/2)$ med avseende på basen $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$.

DEL C

(7) Låt V vara det tvådimensionella delrum av $\mathbb{R}^4$ som utgör lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Den ortogonala projektionen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$ är en linjär avbildning och kan beskrivas med hjälp av en matris om vi väljer en bas för domänen $\mathbb{R}^4$ och en bas för målrummet V. För $\mathbb{R}^4$ är det naturligt att välja standardbasen, men det går också att välja andra baser.

(a) Bestäm en ortogonal bas B för V **(2)**

(b) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på någon vald bas för $\mathbb{R}^4$ och basen B för V. **(2)**

Lösning. (a) Delrummet V är tydligen nollrummet till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ska bestämma en ortogonal bas till detta nollrum och startar därför med att bestämma en bas (som kanske inte är ortogonal). Med hjälp av några elementära radoperationer (Gauss-Jordan) överförs den givna matrisen $\mathbf{A}$ till reducerade trappstegsform:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}.$$

Matrisen $\mathbf{R}$ är på reducerad trappstegsform med två trappstegsettor.
Nollrummet till en matris påverkas inte av elementära radoperationer, så nollrummen till $\mathbf{A}$ och $\mathbf{R}$ är desamma. Den fullständiga lösningen till systemet $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erhålls genom att sätta de fria variablerna x_3 och x_4 till s respektive t, och sedan uttrycka de bundna variablerna x_1 och x_2 i parametrarna s och t. Detta ger att
$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (-s - t,\, 0,\, s,\, t) = s \cdot (-1, 0, 1, 0) + t \cdot (-1, 0, 0, 1)$.
Ur detta följer att de båda vektorerna $(-1, 0, 1, 0)$ och $(-1, 0, 0, 1)$ utgör en bas för nollrummet till matrisen $\mathbf{R}$, och därmed även för nollrummet till matrisen $\mathbf{A}$, och därmed även för delrummet V.
Med Gram-Schmidts metod erhålls sedan att en ortogonal bas $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ till V ges av $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 1, 0)$ och

$$\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-1, 0, 1, 0) = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1).$$

(b) Antag att vi som bas för $\mathbb{R}^4$ väljer standardbasen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, där t ex $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, medan vi som bas för V väljer basen $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ från (a)-uppgiften.

Matrisen för avbildningen T (ortogonala projektionen på V) svarande mot dessa baser är en 2×4-matris vars j:te kolonn är $[T(\mathbf{e}_j)]_B$, dvs kordinaterna i basen B för den ortogonala projektionen av basvektorn $\mathbf{e}_j$ på V.
Eftersom basvektorerna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala så ges ortogonala projektionen av $\mathbf{e}_j$ på V av vektorn

$$\left(\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_j}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\right)\cdot\mathbf{v}_1+\left(\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_j}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\right)\cdot\mathbf{v}_2,$$

vars koordinater i basen B är $\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_j}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}$ resp $\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_j}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}$.
Vår sökta matris är alltså

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1} & \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_2}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1} & \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_3}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1} & \dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_4}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1} \\[2ex] \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_1}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2} & \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2} & \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_3}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2} & \dfrac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_4}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{3} & 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) En ortogonal bas för V ges exempelvis av $\mathbf{v}_1=(-1,0,1,0)$ och $\mathbf{v}_2=(-1/2,0,-1/2,1)$.

(b) Matrisen för avbildningen T blir

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

om man väljer standardbasen i $\mathbb{R}^4$ och basen B i V.

(8) Låt $S = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ vara enhetssfären i det tredimensionlla rummet $\mathbb{R}^3$. En *storcirkel* på S är skärningen mellan S och ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. Låt P vara en given punkt på sfären S.

(a) Låt Q vara en annan punkt på sfären. Visa att det alltid finns minst en storcirkel genom P och Q. **(2)**

(b) Bestäm de punkter, Q, på sfären sådana att det finns en *unik* storcirkel genom P och Q. **(2)**

Lösning. (a) Det finns alltid ett plan som innehåller tre punkt P, Q och origo. Detta kan vi se på följande sätt. Ett plan genom origo ges som nollställemängden till $ax + by + cz = 0$, för något trippel a, b och c - inte all lika med noll. Låt $P = (p_1, p_2, p_3)$ och $Q = (q_1, q_2, q_3)$ vara två punkt på sfären. Ett plan genom punkterna P och Q och origo skall satisfiera följande ekvationssystem

$$\begin{cases} ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0 \\ aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0 \end{cases}$$

Detta är ett homogent ekvationssystem i tre okända a, b och c. Då ekvationssystemet består av enbart två ekvationer kommer det finnas icke-triviala lösningar till ekvationssystemet. Varje så dan icke-trivial lösning bestämmer en ekvation för ett plan som kommer innehålla punkterna P, Q och origo. Skärningen av ett sådant plan med sfären ger en storcirkel genom P och Q.

(b) Tre punkter origo O, P och Q spänner upp ett unikt plan i om och endast om $\overline{OP}$ och $\overline{OQ}$ är linjär oberoende. Dessa två vektorer $\overline{OP}$ och $\overline{OQ}$ är linjärt oberoende om och endast om de inte ligger på samma linje genom origo O. Två punkter P och Q på enhetssfären ligger på samma linje genom origo om och endast om antingen $P = Q$ eller om punkterna är antipodala $Q = -P$. Detta betyder att om punkten $P = (p_1, p_2, p_3)$ är given. Då finns det ett unikt plan genom P och Q och origo, om och endast om $Q \neq P$ och $Q \neq (p_1, -p_2, -p_3)$. Och enbart i dessa fall vill det finnas en unik storcirkel genom P och Q.

□

(9) Om vi har en triangel med hörn i punkterna A, B och C i $\mathbb{R}^3$ är det intressant inom datorgrafik att avgöra om en ljusstråle från origo, O, till en punkt P passerar utanför triangeln, eller fångas upp av triangeln.

(a) Om triangeln inte ligger i ett plan genom origo kan vi byta bas till $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, där $\mathbf{u} = \overline{OA}$, $\mathbf{v} = \overline{OB}$ och $\mathbf{w} = \overline{OC}$. När vi uttrycker vektorn $\overline{OP}$ i denna bas kan vi se på koordinaterna ifall linjen genom O och P går genom triangeln. Hur? **(1)**

(b) Vi kan också se på dessa koordinater om P ligger på samma sida om triangeln som O, i vilket fall strålen ändå når till P utan att träffa triangeln. Hur? **(1)**

(c) Illustrera metoden ovan genom att utföra räkningarna för triangeln med hörn i $A = (5, 5, 0)$, $B = (5, 0, 5)$ och $C = (0, 5, 5)$ och de tre punkterna $P_1 = (3, 5, 3)$, $P_2 = (3, 6, 2)$ och $P_3 = (2, 4, 3)$. **(2)**

Lösning. (a) När vi byter bas kommer triangeln i det nya koordinatsystemet att ha hörn i punkterna $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Triangeln är alltså skärningen mellan planet $x + y + z = 1$ och den positiva oktanten. Att en stråle från origo till en punkt går genom triangeln svarar därför precis mot att alla koordinater är positiva.

(b) För att se om strålen kommer fram eller inte ser vi om den når fram i det nya systemet, vilket innebär att summan av koordinaterna är minst ett i och med att triangeln ligger i planet $x + y + z = 1$.

(c) När vi har punkterna $A = (5, 5, 0)$, $B = (5, 0, 5)$ och $C = (0, 5, 5)$ får vi basbytesmatris från den nya basen till standardbasen som

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

och för att få reda på de nya koordinaterna för punkterna P_1, P_2 och P_3 behöver vi multiplicera dessa koordinatvektorer med inversen P. Vi kan också lösa det genom Gausselimination på totalmatrisen med de tre koordinatvektorerna som högerled.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_2 \\ r_2 + r_3 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 5 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 2r_1 - r_3 \\ 2r_2 + r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Alltså blir de nya koordinaterna för punkterna $(1/2, 1/10, 1/2)$, $(7/10, -1/10, 1/2)$ och $(3/10, 1/10, 1/2)$. I det första och sista fallet är alla koordinater positiva och strålen går genom triangeln, medan den i det andra fallet går utanför. Summan av koordinaterna är $11/10$, $11/10$ och $9/10$. Alltså når strålen inte fram i det sista fallet.

□