KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Bedömningskriterier till tentamen
Torsdagen den 9 juni, 2011

Allmänt gäller följande:

- Om lösningen helt saknar förklarande text till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med "FTS" (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med "FLFT" (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

DEL A

(1) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - 4z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = c \end{cases}$$

där c är en konstant och x, y och z är de tre obekanta.

(a) Visa att det inte finns någon lösning till ekvationssystemet om $c = 2$. **(2)**

(b) Bestäm det värde på konstanten c som gör att systemet har minst en lösning och ange lösningsmängden i detta fall. **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt genomförd Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att systemet saknar lösning när $c = 2$, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motivering till att $c = 4$, **1 poäng**.
- Korrekt bestämd lösningsmängd då $c = 4$, **1 poäng**.

---

(2) (a) Definiera vad det betyder att tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende. **(1)**

(b) Avgör om följande tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende:

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, -2, -1) \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = (1, -4, 4, -1).$$

(2)

(c) Bestäm en bas till det underrum (delrum) i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de tre ovanstående vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. **(1)**

Bedömning:

(a) Korrekt definition av linjärt oberoende, **1 poäng**

(b)
- Korrekt uppställt villkor för att testa linjärt oberoende, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats, **1 poäng**

(c) Korrekt motiverad bas för underrummet, **1 poäng**

---

(3) Betrakta den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -10 \\ 2 & -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$ är egenvektorer till A och ange motsvarande egenvärden. **(2)**

(b) Eftersom matrisen är symmetrisk kommer också $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ att vara en egenvektor. Kontrollera detta och använd det för att hitta en basbytesmatris P sådan att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris. **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt kontroll av att $\mathbf{u}$ är en egenvektor, **1 poäng**
- Korrekt kontroll av att $\mathbf{v}$ är en egenvektor, **1 poäng**

(b)
- Korrekt beräkning av kryssprodukten, **1 poäng**
- Korrekt motiverad basbytesmatris, **1 poäng**

DEL B

(4) Två plan i rummet sägs skära varandra under rät vinkel om deras normalvektorer är ortogonala mot varandra. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller linjen $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t \cdot (1, 3, 1)$ och som skär planet med ekvation $2x + z - 3 = 0$ under rät vinkel. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt uppställda villkor på koefficienterna till planet, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad normalvektor, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad kryssprodukt, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av ekvation, **1 poäng**.

---

(5) Man vill använda minsta-kvadratmetoden för att uppskatta parametrarna i en modell där en storhet z beror på storheterna x och y enligt $z = f(x, y) = ax + by + c$. Efter nio mätningar har man följande tabell av mätvärden:

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	0	1	2	0	1	2
z	-5	-3	1	-4	-2	1	-1	1	4

Tre olika ingenjörer har angripit problemet och kommit fram till tre olika lösningar. Ingenjör A säger att det bästa valet är $(a, b, c) = (3, 3, -7)$, Ingenjör B talar för $(a, b, c) = (2, 3, -6)$ och Ingenjör C för $(2, 2, -5)$.

(a) Vilken av ingenjörerna har lyckats bäst i minsta-kvadratmening? **(2)**

(b) Har någon av dem räknat fram den korrekta minsta-kvadratlösningen? **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt uppställt överbestämt linjärt ekvationssystem, **1 poäng**.
- Korrekt motiverning till att Ingenjör B kom närmast i minsta-kvadratmening, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt uppställda normalekvationer, **1 poäng**.
- Korrekt kontroll av att ingen uppfyller normalekvationerna, **1 poäng**.

(6) Vi har att $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ är en bas för ett underrum V i $\mathbb{R}^5$. Vi har två vektorer $\mathbf{g}_1$ och $\mathbf{g}_2$ i V som tillsammans med $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ uppfyller relationerna

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 + 2\mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{g}_2, \\ 2\mathbf{f}_2 - 4\mathbf{g}_1 &= \mathbf{f}_1. \end{cases}$$

(a) Visa att $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$ också bildar en bas för V. **(2)**

(b) Bestäm koordinaterna till vektorn $2\mathbf{f}_1 - 5\mathbf{f}_2$ i basen $B' = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\}$. **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt motivering till att vektorerna spänner upp V, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till attt vektorerna är linjärt oberoende., **1 poäng**.

(b)
- Korrekt villkor på koordinaterna, **1 poäng**.
- Korrekt bestämda koordinater, **1 poäng**.

DEL C

(7) Låt V vara det tvådimensionella delrum av $\mathbb{R}^4$ som utgör lösningsmängden till det homogena linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Den ortogonala projektionen $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow V$ är en linjär avbildning och kan beskrivas med hjälp av en matris om vi väljer en bas för domänen $\mathbb{R}^4$ och en bas för målrummet V. För $\mathbb{R}^4$ är det naturligt att välja standardbasen, men det går också att välja andra baser.

(a) Bestäm en ortogonal bas B för V **(2)**

(b) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på någon vald bas för $\mathbb{R}^4$ och basen B för V. **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt bestämd bas för V, **1 poäng**.
- Korrekt ortogonal bas för V, **1 poäng**.

(b)
- Korrekta beräkningar av projektionerna av basvektorerna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av matrisen, **1 poäng**.

---

(8) Låt $S = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ vara enhetssfären i det tredimensionlla rummet $\mathbb{R}^3$. En *storcirkel* på S är skärningen mellan S och ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$. Låt P vara en given punkt på sfären S.

(a) Låt Q vara en annan punkt på sfären. Visa att det alltid finns minst en storcirkel genom P och Q. **(2)**

(b) Bestäm de punkter, Q, på sfären sådana att det finns en *unik* storcirkel genom P och Q. **(2)**

Bedömning:

a)
- Korrekt uppställt villkor på koefficienterna för planet som ger storcirkeln, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att det alltid finns icke-triviala lösningar, **1 poäng**.

b)
- Korrekt motivering till att det finns en unik storcirkel om punkterna inte är antipodala, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att det finns flera storcirklar om punkterna är antipodala, **1 poäng**.

---

(9) Om vi har en triangel med hörn i punkterna A, B och C i $\mathbb{R}^3$ är det intressant inom datorgrafik att avgöra om en ljusstråle från origo, O, till en punkt P passerar utanför triangeln, eller fångas upp av triangeln.

(a) Om triangeln inte ligger i ett plan genom origo kan vi byta bas till $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, där $\mathbf{u} = \overline{OA}$, $\mathbf{v} = \overline{OB}$ och $\mathbf{w} = \overline{OC}$. När vi uttrycker vektorn $\overline{OP}$ i denna bas kan vi se på koordinaterna ifall linjen genom O och P går genom triangeln. Hur? **(1)**

(b) Vi kan också se på dessa koordinater om P ligger på samma sida om triangeln som O, i vilket fall strålen ändå når till P utan att träffa triangeln. Hur? **(1)**

(c) Illustrera metoden ovan genom att utföra räkningarna för triangeln med hörn i $A = (5, 5, 0)$, $B = (5, 0, 5)$ och $C = (0, 5, 5)$ och de tre punkterna $P_1 = (3, 5, 3)$, $P_2 = (3, 6, 2)$ och $P_3 = (2, 4, 3)$. **(2)**

Bedömning:

(a) Korrekt motiverad metod för att avgöra om strålen går genom triangeln, **1 poäng**

(b) Korrekt motiverad metod för att avgöra om punkten ligger på samma sida om triangeln som origo, **1 poäng**

(c)
- Korrekt beräknade koordinater i den nya basen, **1 poäng**.
- Korrekt motiverade slutsatser, **1 poäng**.
