Lösningar: Reglerteknik AK Tentamen 2013–10–25

Uppgift 1a

Eftersom systemet inte är asymptotiskt stabilt så fungerar ej standardformeln utan man måste ta med transienten, som i detta fall är en konstant. Direkta räkningar ger

$$\textbf{Svar:}\quad y(t) = \frac{5}{\pi}\sin(2\pi t - \pi/2) + \frac{5}{\pi}$$

Uppgift 1b

Polerna ges av $(1+s)(1+\epsilon s) + 1 = \epsilon s^2 + (1+\epsilon)s + 2 = 0$, och ligger i V.H.P om
Svar: $\epsilon \geq 0$

Uppgift 1c

Derivera PI relationen mellan u och e

$$\dot{u}(t) = K[\dot{e}(t) + \frac{1}{T_I}e(t)].$$

Approximera tidsderivator med Euler bakåt.

$$\frac{1}{T}(1-q_T^{-1})u(t) = \frac{K}{T}(1-q_T^{-1})e(t) + \frac{K}{T_I}e(t), \quad \Rightarrow$$

$$u(t) = u(t-T) + (K + \frac{KT}{T_I})e(t) - Ke(t-T).$$

Här är $K = T_I = 10$ och $T = 0.2$

$$\textbf{Svar:}\quad u(t) = u(t-0.2) + 10.2e(t) - 10e(t-0.2).$$

Uppgift 1d

Stationär punkt: $u_0 = 1, x_0 = 0, y_0 = 0$. Derivator:

$$f_x(x,u) = u, \quad f_u(x,u) = x, \quad h_x(x,u) = 2x, \quad h_u(x,u) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= \Delta x(t) + 0\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= 0\Delta x(t) + 0\Delta u(t) \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar:}\quad \begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= \Delta x(t) \\ \Delta y(t) &= 0 \end{aligned}$$

Uppgift 2a

$K_P = \alpha K_D \Rightarrow$

$$F(s) = K_D(s+\alpha) \;\Rightarrow\; G_o(s) = K_D\frac{(s+\alpha)}{s-1} \quad \Rightarrow \quad P(s) = s-1, \quad Q(s) = (s+\alpha)$$

Startpunkter: $s = 1$, Ändpunkt: $s = -\alpha$, Asymptot ingen, Re-axeln: $[-\alpha, -1]$, Im-axeln: $K_D = 1/\alpha$, $\omega = 0$

Svar: Stabilt: $K_D > 1/\alpha$ ($K_P > 1$)

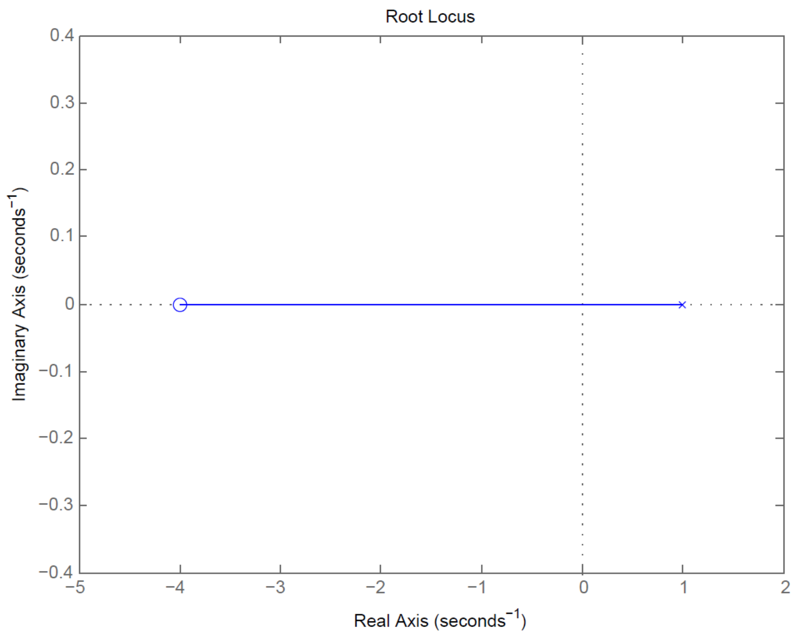

Figure 1: Rotort för $\alpha = 4$

Uppgift 2b

Följande figurer hör ihop: I-C, II-A, III-D, IV-F, V-E och VI-B

- I-C Figur C har bara två reella poler vilket ger ett stegsvar utan översläng.
- II-A Figur A har ett nollställe i 0 vilket gör att stegsvaret går mot noll när tiden går mot ∞.
- III-D Figur D har en pol i origo och en reell pol vilket gör att stegsvaret får ett beteende som liknar en ren integrering.
- IV-F Figur F har två komplexa poler vilket ger ett svängigt stegsvar.
- V-E Figur E har ett nollställe som ligger närmare origo än vad de reella polerna gör vilket betyder ett stegsvar med översläng men utan svängningar.
- VI-B Figur B har endast en pol i origo vilket motsvarar en ren integrering av steget dvs en rät linje som går mot ∞ när tiden går mot ∞.

Uppgift 3a

Önskad $\omega_c = 1$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow |G(i\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg(G(i\omega_c)) = -90^o - 45^o = -135^o$$

PI-regulatorn får högst förstöra fasmarginalen med 6^o, dvs standarvalet for en lag-regulator med $\gamma = 0$ och $T_I = 10/\omega_c = 10$ fungerar här eftersom det minskar fasen med högst -5.7^o. Detta innebär också att $K_PI = \sqrt{2}$ efter lag-regulatorn förstärker appoximativt 1 vid ω_c.

$$\textbf{Svar}: \quad F_{PI}(s) = \sqrt{2}\frac{10s+1}{10s}$$

Uppgift 3b

Vi vill nu hitta en lead-regulator som fasavancerar 21^o vid $\omega_c = 1$: Figur 5.13 i kursboken medför att $\beta \approx 0.45$ ger tillräcklig fasavancering. Detta ger $\tau_D = 1/(\sqrt{\beta}\omega_c) = 1.49$ och $K = \sqrt{\beta} = 0.67$

Svar: Den kompletta regulatorn är

$$F(s) = 0.95\frac{10s+1}{10s}\,\frac{1.49s+1}{0.67s+1}$$

Uppgift 4a

Styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [B\ AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

har full rang ($\det \mathcal{S} = 1$), dvs systemet är styrbart.

Uppgift 4b

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + l_1 s + l_2 - 1 = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$$

Svar:$u(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t)$

Uppgift 4c

Det återkopplade systemet är

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -l_1 & -l_2 + 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

Observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -l_1 + 1 & -l_2 + 1 \end{pmatrix}$$

har $\det \mathcal{O} = l_1 - l_2$, dvs systemet är icke-observerbart om $l_1 = l_2$. Notera att systemet utan återkoppling ($l_1 = l_2 = 0$) inte är observerbart.
Om $l_1 = l_2$ så ges nollrummet av $x_1 + x_2 = 0$, dvs $x_1 = -x_2$. Notera att återkopplingen $u = -l_1 x_1 - l_1 x_2$ blir noll i detta fall.

Uppgift 4c

Eftersom $l_1 = l_2$ och $x(0)$ ligger i det icke-observerbara underrummet så blir $y(t) = 0$ för $t \geq 0$.

Uppgift 5a

$\omega_c = 1$ rad/s och $\varphi_m = 45^o$ med

$$G_o(s) = K\frac{(1 + \tau_D s)}{s^2}, \quad \Rightarrow \arg(G_o(i\omega_c)) = -180^o + \arctan(\tau_D) = 145^o$$

om $\tau_D = 1 \Rightarrow K = 1/\sqrt{2}$
Svar: $u(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}[y(t) + \dot{y}(t)]$

Uppgift 5b

$F(s) = K_1 - K_2 e^{-sT}$ och

$$G_o(s) = \frac{K_1 - K_2 e^{-sT}}{s^2} \quad \Rightarrow \quad G_o(i\omega) = -\frac{K_1 - K_2\cos(\omega T)}{\omega^2} - i\frac{K_2 \sin(\omega T)}{\omega^2}$$

För små ω är imaginärdelen

$$-\frac{K_2 \sin(\omega T)}{\omega^2} \approx \frac{-K_2 T}{\omega} < 0, \quad \omega > 0,$$

så Nyquistkurvan börjar i $Im < 0$. Första gången den skär Re-axeln är för $\omega = \pi/T$, där

$$G_o(\pi/T) = -\frac{K_1 + K_2}{(\pi/T)^2}$$

Om

$$\frac{K_1 + K_2}{(\pi/T)^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{T^2} > (K_1 + K_2)$$

så omcirklas **inte** -1 och förenklade Nyquistkriteriet medför att det återkopplade systemet är stabilt. Övriga skärningar med Re-axeln kommer att ha ett mindre absolutbelopp pga ω^2 i nämnaren.

Uppgift 5c

$$u(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[y(t) + \frac{[y(t) - y(t-T)]}{T}\right] \quad \Rightarrow K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \frac{1}{T}], \quad K_2 = \frac{1}{T\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow K_1 + K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \frac{2}{T}]$$

så stabilitetskravet blir

$$\frac{T^2}{\pi^2\sqrt{2}}[1 + \frac{2}{T}] < 1 \quad \Rightarrow \; 0 < T < \sqrt{1 + \pi^2\sqrt{2}} - 1$$

Detta är bara ett tillräckligt villkor, men ger full poäng på tentan, eftersom upppgiften kopplar till resultatet i Uppgift 5b). En fullständig analys kan göras genom att undersöka alla skärningspunkter med Re-axeln, dvs $\omega = k\pi/T$, $k = 1, 2, 3, ...$ Slutsatsen blir att stabilitet endast håller för udda k med motsvarande två krav

$$K_1 + K_2 \le (k\pi/T)^2, \quad K_1 - K_2 \ge ((k-1)\pi/T)^2, \quad k = 3, 5, 7, ..$$

vilka medför att Nyquistkurvan inte omcirclar -1.