SINUS – IN SINUS – UT

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) = A_H \cos(2\pi f_0 t + \varphi_H)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} = A_H e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_H)}$$

Förstärkning $A_H = |H(f_0)|$

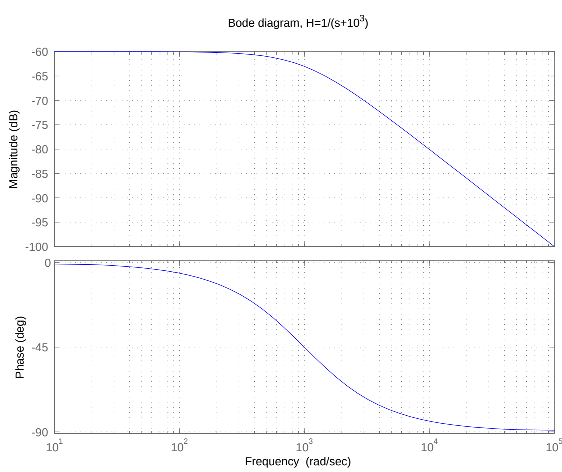
Fasförskjutning $\varphi_H = \angle\{H(f_0)\}$

Specialfall, konstant signal $(f = 0)$: $x(t) = C \implies y(t) = H(0)C$

$\implies$ "Statisk förstärkning" ("static gain")$= H(0)$

BODE-DIAGRAM

Ofta ritas $|H(f)|$ i dB-skala mot frekvensen i log-skala. Kallas **Bode-diagram**. På samma sätt plottas ofta $\angle\{H(f)\}$ mot frekvensen.



TOLKNING, BODE

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} 20\log_{10}\big|Y(f)\big| = 20\log_{10}\big|X(f)\big| + 20\log_{10}\big|H(f)\big| \\ \angle\{Y(f)\} = \angle\{X(f)\} + \angle\{H(f)\} \end{cases}$$

HUR PLOTTA SYSTEMEGENSKAPER I MATLAB

```
s=tf('s'); % Skapa överföringsfunktion motsv. H(s)=s.
H=(s-1)/(s^2-0.2*s+0.8) % Skapa annan överföringsfunktion.
H=tf([1, -1],[1, -0.2, 0.8]) % Alt., ange koeff. i B(s),A(s)
pzplot(H) % Pol-/nollställediagram
bode(H) % Bode-diagram
impulse(H) % Impulssvar
step(H) % Stegsvar
```

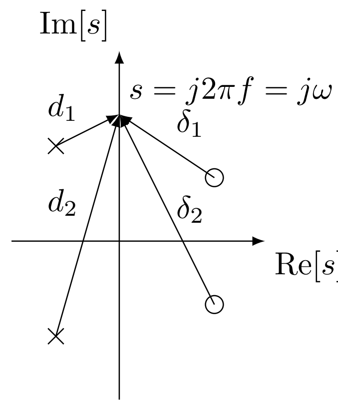
Testa själva, med dessa samt zeropole_demo från hemsidan!

HUR SKISSA BODE-DIAGRAM?

$$H(s) = C\frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_N)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_M)}$$

Nollställen: $n_1, n_2, \dots, n_N$.

Poler: $p_1, p_2, \dots, p_M$.



$$|H(\omega)| = |C|\frac{\overbrace{|j\omega-n_1|}^{\delta_1}\,\overbrace{|j\omega-n_2|}^{\delta_2}\dots\overbrace{|j\omega-n_N|}^{\delta_N}}{\underbrace{|j\omega-p_1|}_{d_1}\,\underbrace{|j\omega-p_1|}_{d_2}\dots\underbrace{|j\omega-p_M|}_{d_1}}$$

$$= |C|\frac{\delta_1\delta_2\dots\delta_N}{d_1d_2\dots d_M}$$

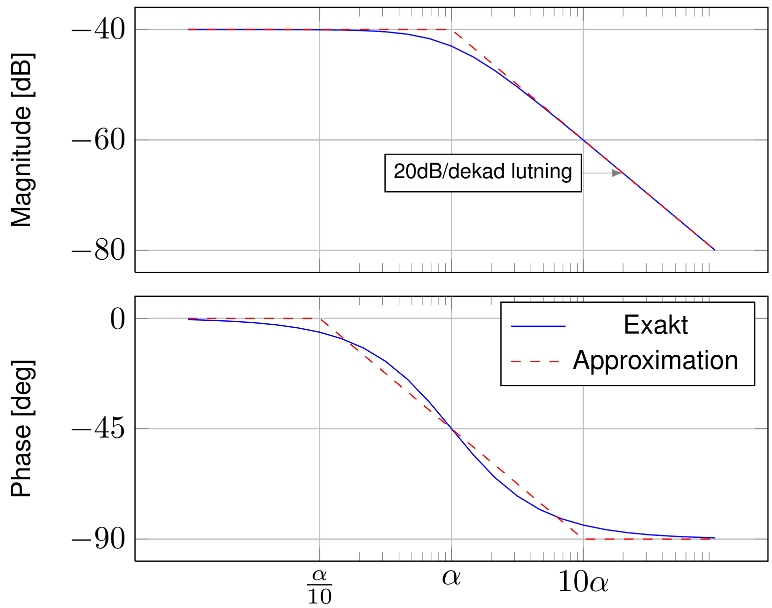
APPROXIMATION FÖR ENKEL REELL POL

$$H(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

$$20\log_{10}\left|H(\omega)\right| \approx \begin{cases} -20\log_{10}(\alpha) & \omega \ll \alpha \\ -20\log_{10}(\omega) & \omega \gg \alpha \end{cases}$$

$$\angle\{H(\omega)\} \approx \begin{cases} 0 & \omega < \alpha/10 \\ \text{rät linje däremellan} & \alpha/10 \le \omega < 10\alpha \\ -\pi/2 & \omega \ge 10\alpha \end{cases}$$

APPROXIMATION FÖR ENKEL REELL POL



BODE, 2 KOMPLEXVÄRDA POLER, $p_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_0$

$$H(s) = \frac{1}{(s+\lambda+j\omega_0)(s+\lambda-j\omega_0)}, \qquad \lambda > 0$$

$$20\log_{10}|H(\omega)| \approx \begin{cases} -40\log_{10}(|p_1|) = -20\log_{10}(\lambda^2+\omega_0^2) & \omega \ll |p_1| \\ -40\log_{10}(\omega) & \omega \gg |p_1| \end{cases}$$

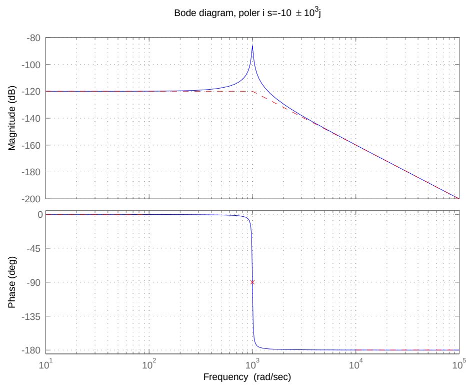
$$\angle\{H(\omega)\} \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll |p_1| \\ -\pi/2 & \omega = |p_1| \\ -\pi & \omega \gg |p_1| \end{cases}$$

- Topp vid $\omega \approx \omega_0$!
- Höjd och bredd på toppen beror på λ!
- Lutningen för höga frekvenser motsvarar -20dB/dekad per pol!

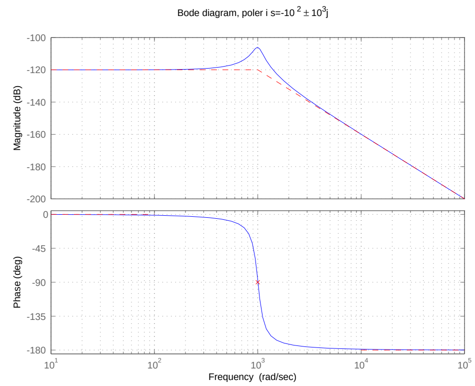
2 KOMPLEXVÄRDA POLER, $p_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_0$

KTH Electrical Engineering

Exampel, poler i $-10 \pm 1000j$



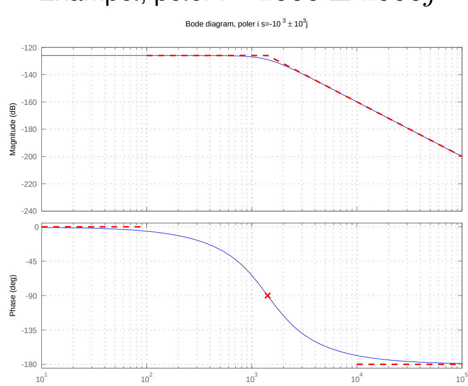
Exampel, poler i $-100 \pm 1000j$



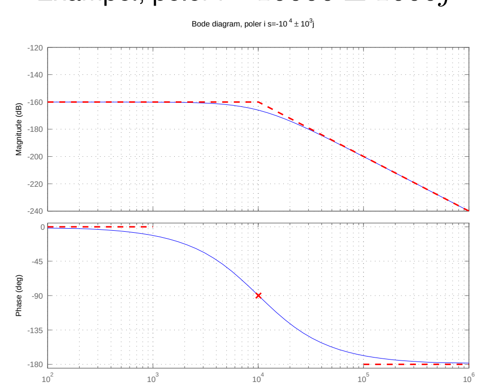
2 KOMPLEXVÄRDA POLER, $p_{1,2} = -\lambda \pm j\omega_0$

KTH Electrical Engineering

Exampel, poler i $-1000 \pm 1000j$



Exampel, poler i $-10000 \pm 1000j$



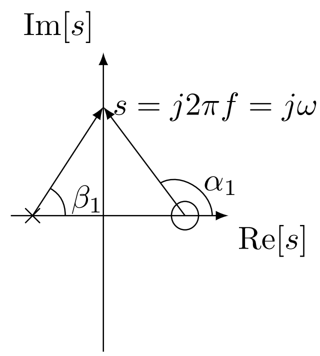
HUR SKISSA FASKURVAN?

$$H(s) = C\frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_N)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_M)}$$

Nollställen: $n_1, n_2, \dots, n_N$.

Poler: $p_1, p_2, \dots, p_M$.

$$\begin{aligned}\angle[H(\omega)] =& \angle[C] + \underbrace{\angle[j\omega - n_1]}_{\alpha_1} + \dots + \underbrace{\angle[j\omega - n_2]}_{\alpha_N} \\ & - \underbrace{\angle[j\omega - p_1]}_{\beta_1} - \dots - \underbrace{\angle[j\omega - p_M]}_{\beta_1} \\ =& \angle[C] + \alpha_1 + \dots + \alpha_N \\ & - \beta_1 - \dots - \beta_M\end{aligned}$$



FASKARAKTÄRISTIK

- Filter med **linjär fas**, $\angle\{H(f)\} = -Kf$ ger samma tidsfördröjning $T = K/(2\pi)$ för alla frekvenskomponenter.
- **Grupplöptid** $\tau(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial f}\angle\{H(f)\} = -\frac{\partial}{\partial\omega}\angle\{H(\omega)\}$ anger tidsfördröjningen för frekvenskomponenter med frekvens f.