Hemtal 6. Inlämning 19/12-2013

Lösningarna till uppgifterna ska vara väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Använd gärna Matlab för att kontrollera att du har räknat rätt.

Skriv lösningarna till varje uppgift på separata blad samt fyll i ett försättsblad. Häfta INTE ihop lösningsbladen. Två av nedanstående uppgifter kommer att samlas in för rättning. Vilka meddelas på lektionen den 19/12.

Uppgift 1

I nedanstående fall, avgör om A är diagonaliserbar och om så är fallet, ange lösningen till $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, givet initial data $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Plotta även de tre komponenterna av lösningen som en funktion av tiden i samma plot med olika färger, för intervallet $0 \leq t \leq 0.5$.

$$a)\, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b)\, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad c)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 2

Låt V vara mängden med alla polynom $f(x)$ i P_2 sådana att $\int_0^3 f(x)dx = 3f(1)$. V är ett underrum till P_2.

a) Bestäm en bas för V.

b) Vad är dimensionen på basen?

Uppgift 3

Låt följande inre produkt vara definierad på $\mathbb{R}^2$,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 8x_1x_2 - 6(x_1y_2 + y_1x_2) + 5y_1y_2.$$

a) Beräkna längden av (1,2) med hjälp av ovanstående inre produkt.

b) Använd ovanstående inre produkt för att hitta en vektor som är ortogonal mot (1,2).

Uppgift 4

a) Givet

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_4} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \text{och } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

definiera $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$. Bestäm *i*) en bas för W, ii) en ortogonal bas för W, iii) projektionen av $\mathbf{y}$ på W. Ange *iv*) dimensionen av W och *v*) dimensionen av $W^\perp$.

b) Givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \ \text{och } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix},$$

skriv $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, där $\mathbf{y}_1 = \text{proj}_{\text{null}(A)}\, \mathbf{y}$ är projektionen av $\mathbf{y}$ på nollrummet av A och $\mathbf{y}_2 = \text{proj}_{\text{row}(A)}\, \mathbf{y}$ är projektionen av $\mathbf{y}$ på radrummet av A. Varför kan du vara säker på att $\mathbf{y}$ har en sådan dekomposition?

Datorlaboration - Egenvärden

Uppgift 5-6 nedan är en fortsättning på datorlaborationen om eiffeltornet på hemtal 4.

Förskjutningen i de uppgifterna beskrev jämviktsläget när noderna utsattes för yttre krafter. Allmänt kommer kraften på varje nod vid förskjutningen $\mathbf{x}$ ges av $\mathbf{F}_{\text{nod}} = -A\mathbf{x}$. I det dynamiska (tidsberoende) fallet följer $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ Newtons andra lag, vilken därför blir

$$\mathbf{F}_{\text{nod}} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + A\mathbf{x} = 0, \tag{1}$$

där m är en effektiv massa för noderna (en liten förenkling av verkligheten).

Uppgift 5

Antag att $m = 1$. Visa (med papper och penna) att om λ, $\mathbf{y}$ är ett egenvärde respektive en egenvektor till A, så är

$$\mathbf{x}(t) = \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)\mathbf{y},$$

en lösning till differentialekvationen (1) ovan.

Egenmoderna till A beskriver alltså de möjliga svängningarna (resonanserna) i fackverket. Egenvärdet λ motsvarar svängningens frekvens (i kvadrat) och egenvektorn $\mathbf{y}$ dess amplitud i varje nod. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är en superposition av alla möjliga sådana svängningar:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{2N} \left[\alpha_k \sin\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) + \beta_k \cos\left(t\sqrt{\lambda_k}\right) \right] \mathbf{y}_k,$$

där $\lambda_k, \mathbf{y}_k$ är egenvärdena/vektorerna till A och α_k, β_k är konstanter som bestäms av begynnelsedata.

Uppgift 6

Välj en av de mindre modellerna och använd MATLAB-kommandot `eig` för att beräkna de fyra lägsta svängningsmoderna, dvs de fyra minsta egenvärdena och motsvarande egenvektorer. (`eig` returnerar inte egenvärdena i storleksordning. Använd därför `sort`-kommandot på lämpligt sätt för att få fram dem i rätt ordning.) Plotta tornet när noderna är förskjutna med full amplitud och ange frekvensen för var och en av dessa moder. Om inte förskjutningen syns bra, prova att göra längden på egenvektorn större genom att multiplicera den med ett tal större än ett.

Testa att animera svängningsmoderna med scriptet `trussanim.m`, som finns i programbiblioteket på kurssidan. Prova gärna fler moder.

Extra uppgift

I section 5.4 i boken beskrivs potensmetoden (the power method) och inversa potensmetoden (se beskrivning för Technology Exercise T4). Beräkna det minsta egenvärdet och motsvarande egenvektor med hjälp av inversa potensmetoden. Hur många iterationer behövs för att få åtta korrekta siffror? Genom att använda LU-faktorisering och metoder för glesa matriser på samma sätt som i hemtal 4 kan man optimera metoden. Kan ni räkna ut det minsta egenvärdet/vektorn även till den största modellen? Skiljer sig dess lägsta svängningsfrekvens mycket från den minsta modellen?