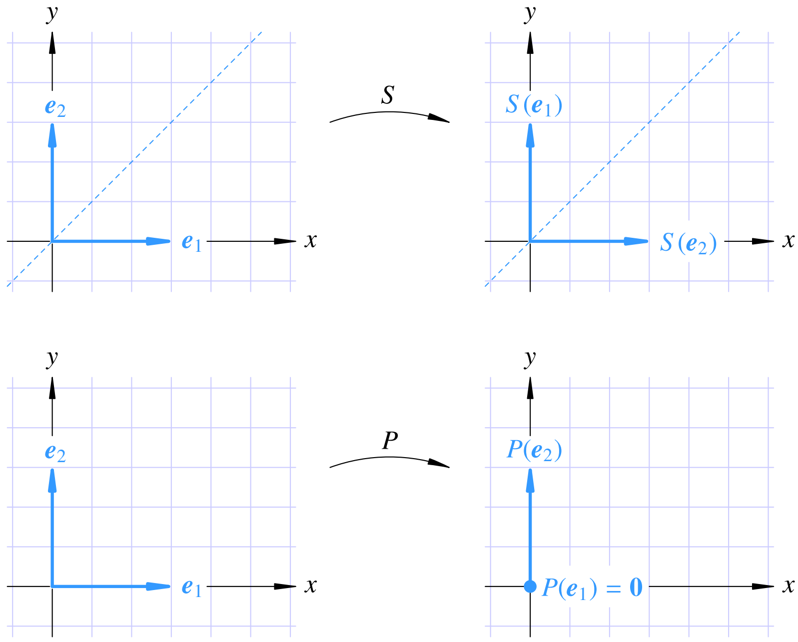
1. a) Vi undersöker hur standardbasvektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ och $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ avbildas med S resp. P.



Detta betyder att matrisen A för S och matrisen B för P är

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ S(\boldsymbol{e}_1) & S(\boldsymbol{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ P(\boldsymbol{e}_1) & P(\boldsymbol{e}_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Den sammansatta avbildningen är $P \circ S$ och har matrisen

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Vi ställer upp vektorerna som kolumner i en matris och radreducerar till trappstegsform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & -4 \\ -2 & 3 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \; + \; 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \; -2 \; - \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \; + \; -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I den reducerade matrisen ser vi att kolumn 1, 2 och 4 utgör en bas för kolumnrummet. Eftersom radoperationer inte förändrar linjära samband mellan kolumner gäller att kolumn 1, 2 och 4 i den ursprungliga matrisen är en bas för den matrisens kolumnrum. En bas är alltså

$$\{(1,1,-1,-2), (-1,0,3,3), (3,2,-4,-6)\}.$$

b) Om vi skriver vektorn $\boldsymbol{u}$ som en linjärkombination av basvektorerna,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

så har $\boldsymbol{u}$ koordinaterna (k_1, k_2, k_3) i basen.
Vektorekvationen $(*)$ kan skrivas som ett linjärt ekvationssystem i matrisform,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

och vi löser detta linjära system med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 6 \\ -2 & 3 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

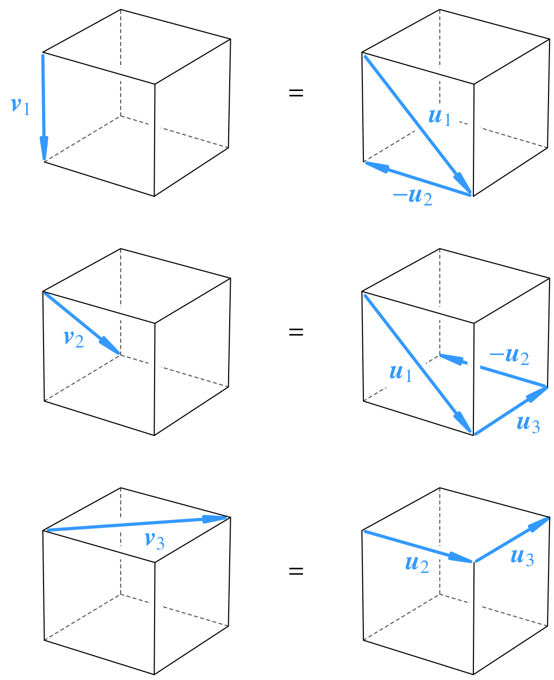
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från slutschemat avläser vi att

$$\begin{cases} k_1 = -1, \\ k_2 = 3, \\ k_3 = 1. \end{cases}$$

Alltså har vektorn $\boldsymbol{u}$ koordinaterna $(-1, 3, 1)$ i basen.

3. a) Vi uttrycker först vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ i termer av vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$.



Alltså är

$$v_1 = u_1 - u_2, \quad v_2 = u_1 - u_2 + u_3, \quad v_3 = u_2 + u_3,$$

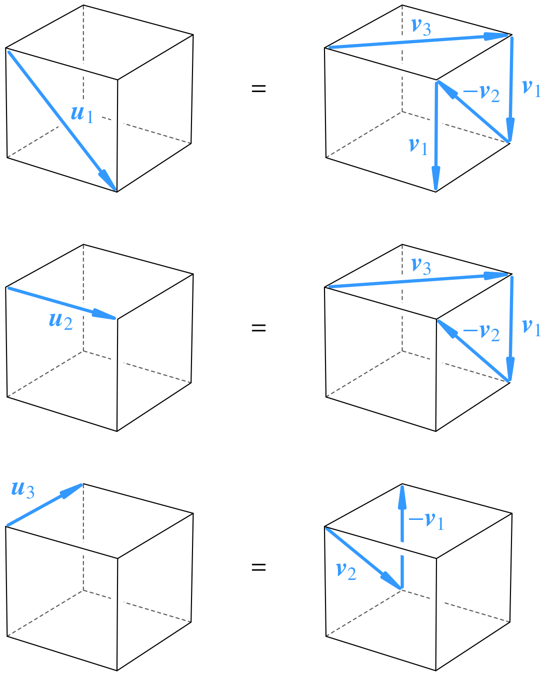
eller uttryckt i koordinatform

$$(v_1)_B = (1, -1, 0), \quad (v_2)_B = (1, -1, 1), \quad (v_3)_B = (0, 1, 1).$$

Detta ger att

$$P_{B \leftarrow B'} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ (v_1)_B & (v_2)_B & (v_3)_B \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nu uttrycker vi istället vektorerna u_1 , u_2 och u_3 i termer av vektorerna $\{v_1, v_2, v_3\}$.



Vi har alltså att

$$u_1 = 2v_1 - v_2 + v_3, \quad u_2 = v_1 - v_2 + v_3, \quad u_3 = -v_1 + v_2,$$

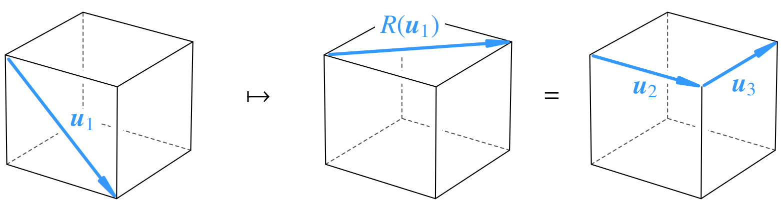
eller i koordinatform

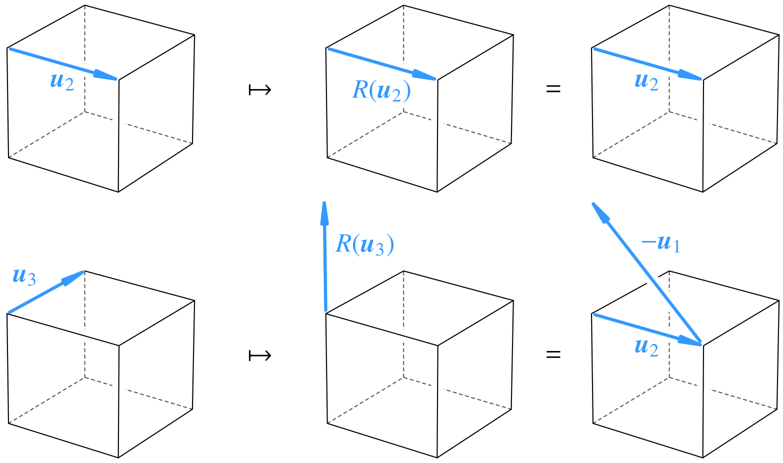
$$(u_1)_{B'} = (2, -1, 1), \quad (u_2)_{B'} = (1, -1, 1), \quad (u_3)_{B'} = (-1, 1, 0).$$

Därmed är

$$P_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \vert & \vert & \vert \\ (u_1)_{B'} & (u_2)_{B'} & (u_3)_{B'} \\ \vert & \vert & \vert \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) För att ställa upp rotationens matris i basen B undersöker vi hur basvektorerna i B avbildas.





Alltså har vi att

$$R(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \quad R(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2, \quad R(\boldsymbol{u}_3) = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,$$

eller uttryckt i koordinatform

$$R(\boldsymbol{u}_1)_B = (0,1,1), \quad R(\boldsymbol{u}_2)_B = (0,1,0), \quad R(\boldsymbol{u}_3)_B = (-1,1,0).$$

Rotationens matris ges nu av

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ R(\boldsymbol{u}_1)_B & R(\boldsymbol{u}_2)_B & R(\boldsymbol{u}_3)_{B'} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i basen B.