Del A

1. a) Värdena $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$ ska vara egenvärden till A och ska därför uppfylla den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Detta ger oss de tre determinantvillkoren

$$\det(A + 2E) = 0, \quad \det(A - E) = 0 \quad \text{och} \quad \det(A - 3E) = 0.$$

b)
```
for a11=-2:2,
  for a12=-2:2,
    for a13=-2:2,
      for a21=-2:2,
        for a22=-2:2,
          for a23=-2:2,
            for a31=-2:2,
              for a32=-2:2,
                for a33=-2:2,
                  A = [a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];
                  if (det(A+2*eye(3)) == 0) && ...
                     (det(A-eye(3)) == 0) && ...
                     (det(A-3*eye(3)) == 0)
                    disp(A)
                  end
                end
              end
            end
          end
        end
      end
    end
  end
end
```

2. Förslag:

a) Ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har en parameterlösning eftersom $\det A = 0$.

b) Att vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$ betyder att de är linjärt oberoende.

c) Om tre vektorer i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende så är de parallella med ett och samma plan.

d) En matris A är diagonaliserbar då A:s egenvektorer är linjärt oberoende och lika många som antalet kolumner i A.

3. Vi har att

$$A\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = 7\,\boldsymbol{u}_1,$$

$$A\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,\boldsymbol{u}_2,$$

$$A\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ -7 \end{pmatrix} = -7\,\boldsymbol{u}_3,$$

och kan avläsa att $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är egenvektorer som svarar mot egenvärdena $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 0$ respektive $\lambda_3 = -7$.

En diagonalisering av A är därför

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. a) Alla punkter på z-axeln har koordinater på formen $(0, 0, t)$ för något t. Stoppar vi in dessa koordinater i konens ekvation får vi

$$4x^2 + y^2 - yz - y = 4 \cdot 0^2 + 0^2 - 0 \cdot t - 0 = 0,$$

dvs. konens ekvation är uppfylld vilket visar att punkterna på z-axeln ligger på konen.

b) Konen skär planet längs en kurva som har ekvationen

$$4x^2 + 1^2 - 1 \cdot z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 4x^2,$$

dvs. en parabel. Vi får två punkter på parabeln genom att t.ex. sätta $x = 0$ och $x = 1$ i parabelns ekvation och får då $z = 0$ respektive $z = 4$. Två punkter på parabeln är alltså $(0, 1, 0)$ och $(1, 1, 4)$.

c) Konen skär planet $z = 1$ längs en kurva som har ekvationen

$$4x^2 + y^2 - y \cdot z - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

Vi kvadratkompletterar y och får ekvationen för en ellips,

$$4x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + (y-1)^2 = 1.$$

Nu kan vi avläsa att huvudaxlarna är x- och y-axlarna och storaxelns längd är $2 \cdot 1 = 2$ (i y-riktningen) och lillaxelns längd är $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ (i x-riktningen).

Del B

5. a) Vektorerna är linjärt oberoende om vektorekvationen

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$$

endast har lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Skriver vi vektorerna i kolumnform blir ekvationen

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och vänsterledet kan skrivas i matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi löser detta linjära ekvationssystem med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Från slutschemat avläser vi att systemet endast har lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, vilket betyder att vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ är linjärt oberoende.

b) Vektorn $\boldsymbol{v}$ har koordinaterna $(1, 1, 3, -2)$ i basen $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ om

$$\boldsymbol{v} = 1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + 3 \cdot \boldsymbol{u}_3 - 2 \cdot \boldsymbol{u}_4$$

dvs. om

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_4 &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{v}) \\ &= (1, 2, 5, 1). \end{aligned}$$

Samlingen $B = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ är en bas för $\mathbf{R}^4$ om vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ och $\boldsymbol{u}_4$ är linjärt oberoende. För att visa detta visar vi att vektorekvationen

$$k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + k_3\boldsymbol{u}_3 + k_4\boldsymbol{u}_4 = \mathbf{0}$$

endast har lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Vektorekvationen skriver vi i kolumnform

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller i matrisform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta system löser vi med gausseliminering,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad 2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \quad 7 \quad -5 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ - \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{7} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ - \quad + \quad -4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{21} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\frac{21}{4} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -\frac{4}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Vi avläser att systemet endast har lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Vektorerna $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ och $\boldsymbol{u}_4$ är alltså linjärt oberoende och B är därmed en bas för $\mathbf{R}^4$.

6. a) Vi får en vektor parallell med respektive linje genom att välja två punkter P och Q på linjen och bilda vektorn $\overrightarrow{PQ}$.

- På linjen $x - y = 0$ väljs t.ex. $P = (0, 0)$ och $Q = (1, 1)$ och då får vi den första basvektorn till $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 1)$.
- På linjen $x + 2y = 0$ väljs t.ex. $P = (0, 0)$ och $Q = (-2, 1)$ och då får vi den andra basvektorn till $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{PQ} = (-2, 1)$.

Vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är en bas för $\mathbf{R}^2$ eftersom de inte är parallella (ej skalär multipel av varandra) och därmed linjärt oberoende.

b) I basen $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ betecknar vi koordinaterna med (x', y') och basbytesformeln ger då att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{E\leftarrow B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Alltså,

$$\begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

I de nya koordinaterna blir vänsterledet i hyperbelns ekvation,

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2y^2 &= (x' - 2y')^2 + (x' - 2y')(x' + y') - 2(x' + y')^2 \\ &= (x')^2 - 4x'y' + 4(y')^2 + (x')^2 - x'y' - 2(y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 \\ &= -9x'y'. \end{aligned}$$

Hyperbelns ekvation i de nya koordinaterna är alltså

$$x'y' = -\tfrac{2}{9}.$$

7. Vektorn $\boldsymbol{u}$ ska avbildas på vektorn $\boldsymbol{v}$ som i sin tur ska avbildas tillbaka på $\boldsymbol{u}$. Detta betyder att $\boldsymbol{u}$ avbildas på sig själv med A^2, men samtidigt ska $\boldsymbol{u}$ inte avbildas på sig själv med A (eftersom $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$). Vi kan sammanfatta detta som att

   1. $\boldsymbol{u}$ är en egenvektor till A^2 med egenvärdet 1,
   2. $\boldsymbol{u}$ är inte en egenvektor till A med egenvärdet 1, och
   3. $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$.

   Egenvärden och motsvarande egenvektorer till A är

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda = -1$	$(23, -15, 17)$
$\lambda = 0$	$(6, -5, 5)$
$\lambda = 1$	$(1, -1, 1)$

   och detta medför att matrisen A^2 har följande egenvärden och motsvarande (linjärt oberoende) egenvektorer:

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda = 1$	$(23, -15, 17)$
$\lambda = 0$	$(6, -5, 5)$
$\lambda = 1$	$(1, -1, 1)$

   Vektorn $\boldsymbol{u}$ ska alltså tillhöra delrummet $\operatorname{span}\{(23, -15, 17), (1, -1, 1)\}$ men inte del-delrummet $\operatorname{span}\{(1, -1, 1)\}$. Ett exempel är $\boldsymbol{u} = (23, -15, 17)$ och då är $\boldsymbol{v} = (-23, 15, -17)$.

8. a) Egenvärden och motsvarande egenvektorer till A är

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$	$\boldsymbol{u}_1 = (2, 1 - \sqrt{5})$
$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$	$\boldsymbol{u}_1 = (2, 1 + \sqrt{5})$

   En diagonalisering av A är därför

   $$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 - \sqrt{5} & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1}.$$

   b) För en diagonalmatris

   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

   gäller att dess heltalspotenser ges av

   $$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

I vårt fall betyder det att

$$
\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ 2\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n+1} & 2\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n+1} \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

där

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}+1) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n (\sqrt{5}-1) \\
b_n &= -2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.
\end{aligned}
$$

c) Använder vi resultatet i deluppgift b får vi att

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a_n + b_n \\ a_{n+1} + b_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{a_n + b_n}{2\sqrt{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\sqrt{5}+1-2\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\sqrt{5}-1+2\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].
\end{aligned}
$$