KTH Teknikvetenskap

SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 8 januari 2014 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Bestäm alla reella lösningar till olikheten $|2x+3| < 5x+1$.

(2) Ange på standardform ett femtegradspolynom $p(z)$ sådant att

$$p(i) = p(-i) = p(2) = p(-2) = p(0) = 0.$$

(Med standaradform menas att polynomet skrivs på formen $p(z) = a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$)

(3) Beräkna

$$\sum_{k=0}^{11} (1+i)^k$$

och skriv summan på så enkel form som möjligt.

Del II

(4) a) Talet n ges i bas 10 av $n = (1234)_{10}$. Uttryck n i bas 5. (2p)

b) Ett visst naturligt tal $m > 0$ har en representation i bas 5 som skrivs med fyra siffror och slutar med två nollor, det vill säga m har ett sifferuttryck i bas 5 av formen $m = (d_3 d_2 00)_5$, där $d_3 \neq 0$. Vilka slutsatser kan man dra om de äkta delarna till m? (2p)

(5) a) Visa att $\log_{100} x = \log_{10} \sqrt{x}$ för alla $x > 0$. (2p)

b) Är det sant att

$$\log_{a^r} y^r = \log_a y$$

för alla $a > 1$, $r > 0$ och $y > 0$? (2p)

(6) Visa att funktionen

$$f(x) = \frac{x-7}{2x+5}$$

är inverterbar och bestäm dess inversfunktion. Ange också definitionsmängd och värdemängd till inversfunktionen.

Del III

(7) Visa att
$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} < \int_0^1 2^x\,dx < \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$
utan att beräkna integralen.

(8) Bevisa att
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$
för alla naturliga tal $n \geq 1$ och k sådana att $0 < k < n$.
Du kan om du vill utnyttja att $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

(9) a) Förklara vad som menas med att en mängd är uppräkneligt (*countabel, denumerable*) oändlig. (2p)
b) Visa att mängden av de positiva rationella talen är uppräknelig. (2p)
