Family name, first name	Personal Registration Number	Programme	Sheet no.	Problem no.

SF1661 Tentamen 2014-01-08

SVAR OCH LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Vi söker först lösningar på intervallet $2x+3 \geq 0 \iff x \geq -3/2$.

Då gäller att $|2x+3| = 2x+3$ och

$$|2x+3| < 5x+1 \iff 2x+3 < 5x+1$$

$$\iff 3x > 2 \iff x > \frac{2}{3}$$

Dvs på intervallet $x \geq -3/2$ är olikheten uppfylld om och endast om $x > 2/3$.

Vi söker nu lösningar på intervallet $2x+3 < 0 \iff x < -3/2$.

Då är $|2x+3| = -2x-3$ och

$$|2x+3| < 5x+1 \iff -2x-3 < 5x+1$$

$$\iff 7x > -4 \iff x > -4/7.$$

Eftersom $-4/7 > -3/2$ finns inga lösningar på intervallet $x < -3/2$.

SVAR: $x > 2/3$

(2.) Enligt Algebrans fundamentalsats och Faktorsatsen gäller att $p(z)$ måste vara av formen

$$p(z) = k(z-i)(z+i)(z-2)(z+2)(z-0)$$

där k är en godtycklig komplex konstant. Vi väljer $k=1$ och får

$$p(z) = (z^2-(i)^2)(z^2-2^2)\cdot z$$

$$= z(z^2+1)(z^2-4) =$$

$$= z(z^4-4z^2+z^2-4) =$$

$$= z^5-3z^3-4z$$

Svar: $p(z) = z^5 - 3z^3 - 4z$

③ Sätt först $w = 1+i$. Om

$$S = \sum_{k=0}^{11} w^k \quad \text{är} \quad wS = \sum_{k=1}^{12} w^k$$

$$S - wS = (1 + w + w^2 + \dots + w^{11}) - (w + w^2 + \dots + w^{12})$$

$$= 1 - w^{12}$$

så

$$S = \frac{1-w^{12}}{1-w} = \frac{w^{12}-1}{w-1} = \frac{(1+i)^{12}-1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^{12}-1}{i}.$$

$(1+i)^{12}$ beräknas genom att gå över till polär form.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{12/2}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^6(-1)$$

$$= -64.$$

Alltså är

$$S = \sum_{k=0}^{11}(1+i)^k = \frac{(1+i)^{12}-1}{i} = \frac{-64-1}{i} = \frac{i(-65)}{i^2} = 65i$$

<u>Svar:</u> $65i$

4

a) $n = (1234)_{10}$ ska uttryckas i bas 5.

Platsvärden i bas 5 ges av

$5^0 = 1$

$5^1 = 5$

$5^2 = 25$

$5^3 = 125$

$5^4 = 625$

$5^5 > 1234$

så n skrivs på formen

$n = (d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)_5 =$

$= d_4 \cdot 5^4 + d_3 \cdot 5^3 + d_2 \cdot 5^2 + d_1 \cdot 5^1 + d_0 \cdot 5^0$

i bas 5, där $0 \leq d_i \leq 4$, $i = 0, 1 \ldots 4$.

$1234 = 1 \cdot 625 + 609$

$609 = 4 \cdot 125 + 109$

$109 = 4 \cdot 25 + 9$

$9 = 1 \cdot 5 + 4$

$4 = 4 \cdot 1$

så

$1234 = 1 \cdot 625 + 609 = 1 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 109$

$= 1 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 9 =$

$= 1 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1$

$= 1 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = (14414)_5$

4 b)

$$m = (d_3 d_2 0 0)_5 =$$

$$= d_3 \cdot 5^3 + d_2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$$

$$= d_3 \cdot 5^3 + d_2 \cdot 5^2 = 5^2 (d_3 \cdot 5 + d_2)$$

$$= 25 (5 d_3 + d_2)$$

där $0 \leq d_2 \leq 4$, $0 < d_3 \leq 4$.

Det är klart att $5 | m$ och $25 | m$, eftersom $m = 25 k$, $k = 5 d_3 + d_2$.

Några andra slutsatser kan inte dras, t.ex. skulle $d_3 = 1$ och $d_2 = 2$ ge

$$m = 25 \cdot 7$$

medan $d_3 = 2$ och $d_2 = 3$ ger

$$m = 25 \cdot 13$$

~~Så~~ Alltså: Ett tal $m = (d_3 d_2 0 0)_5$ har säkert $(5)_{10}$ och $(25)_{10}$ som äkta delare, övriga äkta delare beror på d_3 och d_2.

Svar: a) $(14414)_5$ b) $(5)_{10}$ och $(25)_{10}$

5.

a) $y = \log_{100} x \iff 100^y = x$

$\iff (10^2)^y = x \iff 10^{2y} = x$

$\iff (10^y)^2 = x \overset{(x>0)}{\iff} 10^y = x^{1/2}$

$\iff y = \log_{10}\sqrt{x}$. V.S.B.

b) JA, $\log_{a^r} y^r = \log_a y$, alla $a>1$, $r>0$, $y>0$.

Bevis:

$t = \log_{a^r} y^r \iff (a^r)^t = y^r \iff$

$\iff a^{rt} = y^r \iff (a^t)^r = y^r$

$\iff a^t = y \iff t = \log_a y$

(Då $a>1>0 \Rightarrow a^t>0$ och $y>0$)

Alltså $\log_{a^r} y^r = \log_a y$. V.S.B.

6. Om $f(x) = \dfrac{x-7}{2x+5}$ är

f def för alla $x \neq -\frac{5}{2}$, $D_f = \{x : x \neq -5/2\}$.

Sätt $y = \dfrac{x-7}{2x+5}$, $x \neq -5/2$.

$\Leftrightarrow (2x+5)y = x-7 \Leftrightarrow 2xy + 5y = x - 7$

$\Leftrightarrow 2xy - x = -5y - 7 \Leftrightarrow x(2y-1) = -5y-7$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5y-7}{2y-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{5y+7}{-2y+1}$

(om $y \neq 1/2$)

Alltså: Om $y \neq 1/2$ finns det ett entydigt $x \neq -5/2$ sådant att $f(x) = y$, nämligen $x = \dfrac{5y+7}{-2y+1}$.

Det följer per definition att

<u>SVAR:</u> $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+7}{-2x+1}$, $D_{f^{-1}} = \{x : x \neq 1/2\}$

och $V_{f^{-1}} = D_f = \{y : y \neq -5/2\}$

(7.) Se Gottlieb's Funktionslära, övning 10, sidan 27.

(8.)

$$H.L. = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots k\cdot(k+1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k-1)} + \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots k\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)}$$

$$= \frac{n!\,(n-k)}{\underbrace{1\cdot 2\cdots(k+1)}_{(k+1)!}\cdot\underbrace{1\cdot 2\cdots(n-k-1)(n-k)}_{(n-k)!}} + \frac{n!\,(k+1)}{\underbrace{1\cdot 2\cdots k\,(k+1)}_{(k+1)!}\cdot\underbrace{1\cdot 2\cdots(n-k)}_{(n-k)!}}$$

$$= \frac{n!\,\left((n-k)+(k+1)\right)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} = V.L.$$

V.S.B.

9. Se What is Mathematics,

sid 77-80.