Lösningsförslag: Reglerteknik AK Tentamen 2014–01–10

Uppgift 1a

Direkta räkningar ger

$$\textbf{Svar:} \quad y(t) = 20\pi \sin(2\pi t + \pi/2) = 20\pi \cos(2\pi t)$$

Observera att det är begynnelslevärdet på $u(t)$ som är noll.

Uppgift 1b

Polerna ges av $(1+s)(1-\epsilon s) + 1 = -\epsilon s^2 + (1-\epsilon)s + 2 = 0$, och ligger i V.H.P endast om
Svar: $\epsilon = 0$

Uppgift 1c

Derivera PI-relationen mellan u och e

$$\dot{u}(t) = K[\dot{e}(t) + \frac{1}{T_I}e(t)].$$

Approximera tidsderivator med Euler bakåt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}(1-q_T^{-1})u(t) &= \frac{K}{T}(1-q_T^{-1})e(t) + \frac{K}{T_I}e(t), \quad \Rightarrow \\ u(t) &= u(t-T) + (K + \frac{KT}{T_I})e(t) - Ke(t-T) \end{aligned}$$

Jämförelse med $u(t) = u(t-T) + 10.2e(t) - 10e(t-T)$ ger
Svar: $K = 10$ och $T = 0.02T_I$

Uppgift 1d

Stationär punkt: $u_0 = 1, x_0 = -1, y_0 = 1$. Derivator:

$$f_x(x,u) = 2(x+u), \quad f_u(x,u) = 2(x+u), \quad h_x(x,u) = 2x, \quad h_u(x,u) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= 0\Delta x(t) + 0\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= -2\Delta x(t) + 0\Delta u(t) \end{aligned}$$

$$\textbf{Svar:} \quad \begin{aligned} \Delta\dot{x}(t) &= 0 \\ \Delta y(t) &= -2\Delta x(t) \end{aligned}$$

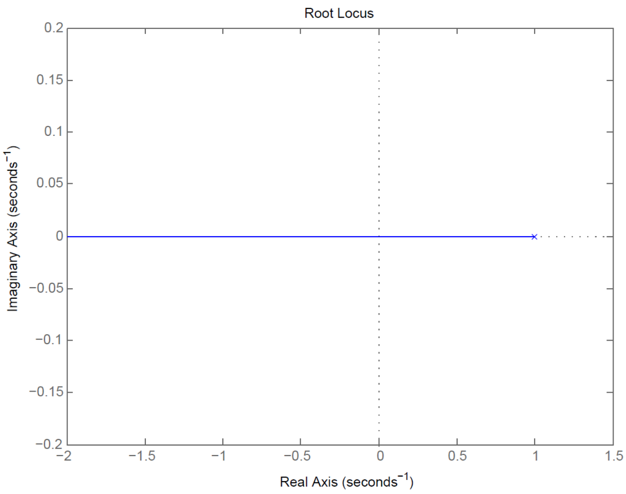
Uppgift 2a

i)

$$G_o(s) = \frac{K_P}{s-1}, \quad \Rightarrow \quad P(s) = s-1, \quad Q(s) = 1$$

Startpunkt: $s = 1$ Ändpunkt: saknas, Asymptot π, Re-axeln: $[-\infty, 1]$, Im-axeln: $K_P = 1$ $\omega = 0$

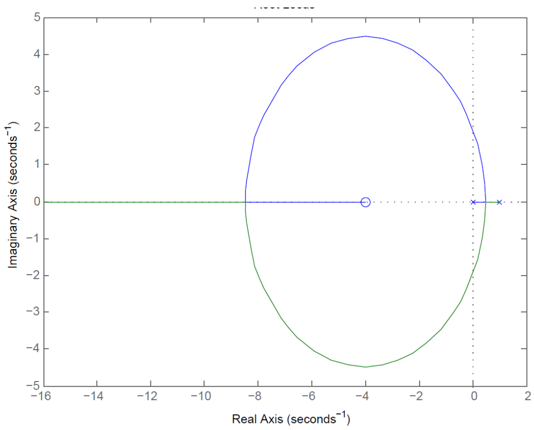
Svar: Stabilt: $K_P > 1$



ii) $K_I = \alpha K_P \Rightarrow$

$$F(s) = K_P \frac{s+\alpha}{s} \Rightarrow G_o(s) = K_P \frac{(s+\alpha)}{s(s-1)} \quad \Rightarrow \quad P(s) = s(s-1), \quad Q(s) = (s+\alpha)$$

Startpunkter: $s = 1$, $s = 0$ Ändpunkt: $s = -\alpha$, Asymptot π, Re-axeln: $[-\infty, -\alpha]$, $[0, 1]$, Im-axeln: $K_P = 1$, $\omega = \pm\sqrt{\alpha}$
Svar: Stabilt: $K_P > 1$



Uppgift 2b

$\Delta G(s) = \epsilon s$, $T(s) = 1/(s+1)$, Robust stabilt om

$$|\Delta G(i\omega)T(i\omega)| \leq 1,\ \forall \omega \ \Rightarrow \ \frac{|\epsilon\omega|}{\sqrt{1+\omega^2}} \leq 1,\ \forall\, \omega \ \Rightarrow \ (\epsilon^2-1)\omega^2 \leq 1\ \forall \omega \ \Rightarrow -1 < \epsilon < 1$$

Svar: Robust stabilt om $-1 < \epsilon < 1$

Uppgift 3a

Skärfrekvensen för $F(s) = 0.16$ fås via Bodediagrammet till $\omega_c \approx 1$ [rad/s]. Krav i. medför att önskad skärfrekvens är $\bar{\omega}_c = 2$ [rad/s].
Faskurvan ger $\arg G(i\omega_c) \approx -135^o$ och $\arg G(i\bar{\omega}_c) \approx -210^o$. Krav ii. ger att vi måste fasavancera $-135+210+6^o = 81^o$. Här har vi tagit hänsyn till lag-länk. Vi kan göra detta mha två lead-länkar om 41^o grader var, vilket medför $\beta \approx 0.2$ och

$$\tau_D = \frac{1}{\bar{\omega}_c\sqrt{\beta}} \approx 1.1$$

Förstärkningen K räknas ut via $|F(i\bar{\omega}_c)G(i\bar{\omega}_c)| = 1$. Från Bodedigrammet fås $|G(i\bar{\omega}_c)| \approx 0.2/0.16 = 1.25$, och

$$\frac{K}{\beta}|G(i\bar{\omega}_c)| = 1 \ \Rightarrow K = \frac{\beta}{|G(i\bar{\omega}_c)|} \approx 0.17\,.$$

Krav iii. löses via lag-länk (gränsvärdet existerar eftersom det återkopplade systemet är stabilt)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+F(s)G(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+F(0)G(0)} < 0.05$$

Med lag länk fås $F(0) = K/\gamma$ och från Bodediagrammet fås $G(0) \approx 1.6/0.16 = 10$. Följaktligen

$$\frac{1}{1+F(0)G(0)} < 0.05 \;\Rightarrow \gamma < K\,G(0)/\left(\frac{1}{0.05}-1\right) \approx 0.084\,.$$

vilket medför $\gamma = 0.08$ och $\tau_I = 10/\bar{\omega}_c = 5$.

$$\textbf{Svar:}\quad F(s) = 0.17\left(\frac{1.1\,s+1}{0.23\,s+1}\right)^2 \frac{5\,s+1}{5\,s+0.08}\,.$$

Uppgift 3b

Med en fasmarginal på $\varphi_m = 45^o$ kan vi maximalt tillåta en fasfördröjning motsvarande $\bar{\omega}_c T = 45^o = \pi/4$, rad dvs

Svar: $T < \pi/8$ s

Uppgift 4a

$x_1 = y$ och

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Svar: $A_1 = -1$, $B_1 = 1$ och $C_1 = 1$

Uppgift 4b

$u_1(t) = -l_1 x_1(t) + u(t) \Rightarrow \det(sI - (A_1 - B_1 l_1)) = s + 1 + l_1 = s + 20 \Rightarrow l_1 = 19$
Svar: $u_1(t) = -19x_1(t) + u(t)$

Uppgift 4c

Inre slutna systemet blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -20x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

och stationärt $u_2 = x_1 = u/20$, dvs det approximativa systemet blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + \frac{1}{20}B_2 u(t) \\ u(t) &= -Lx(t) \end{aligned}$$

Slutna systemets poler ges av

$$\det(sI - (A_2 - \frac{1}{20}B_2L)) = (s + 4 + \frac{l_2}{20})(s + \frac{l_3}{20}) - \frac{l_2}{20}\frac{l_3}{20} = (s+4)(s+5)$$

Här ser man direkt att $l_2 = 0$ och $l_3 = 100$ uppfyller kravet.
Svar: $u(t) = -100x_3(t)$

Uppgift 4d

Det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -20x_1(t) - 100x_3(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 4x_2(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

Och polerna ges av egenvärdena till

$$A = \begin{pmatrix} -20 & 0 & -100 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda+4)(\lambda+10)^2$$

Svar: Poler i -4, -10 och -10.

Uppgift 5a

Se sidan 147 i kursboken:

$$\textbf{Svar:} \quad E(s) = \frac{1}{1 + F_y(s)G(s)}[1 - F_f(s)G(s)]R(s)$$

Uppgift 5b

$$F_f(s) = \frac{1}{G(s)}, \quad \Rightarrow \quad E(s) = 0$$

Uppgift 5c

Gör motsvarande knep som i en lead-länk, t.ex. låt

$$F_f(s) = \frac{1}{G(s)}\frac{1}{(1+\epsilon s)^m}$$

där $\epsilon > 0$ är litet, relativt bandbredd, och m är antal poler minus antal nollställen i $G(s)$.

Uppgift 5d

$$F_f(s)G(s) = (-s+1)(s+1) \quad \Rightarrow \quad F_f(i\omega)G(i\omega) = 1 + \omega^2, \quad \text{ett positivt reellt tal!}$$

Uppgift 5e

$$|F_f(i\omega)G(i\omega)| = 1 + \omega^2$$

vilket medför att relationen är uppfylld för $0 \leq |\omega| \leq \sqrt{1 - 1/\sqrt{2}}$