Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 2, 2014-01-13, kl. 08.00 – 13.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

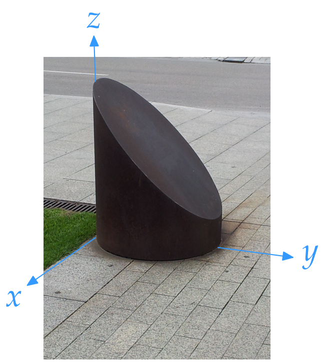
Betygsgränser vid denna tentamen är

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

1. I Barcelonas hamn finns trafikhinder som har formen av stympade cirkulära cylindrar enligt bilden, med måtten $r = \frac{3}{2}$ (dess radie), $a = 5$ (dess höjd) och $b = 1$ (höjden för det övre plana ytstyckets lägsta punkt).

   Inför ett högerhandsorienterat ortonormalt koordinatsystem (ON-system), där z-axeln är parallell med cylinderns axel och går genom hindrets högsta punkt, origo ligger på markplanet och y-axeln går genom bascirkelns medelpunkt.



   a) Bestäm ekvationen för den cylinder som hindrets cylindriska ytstycke är en del av. (2 p)

   b) Bestäm ekvationen för det plan som hindrets övre plana ytstycke är en del av. (2 p)

2. Skriv en Matlab-funktion `uniqcols` som tar en matris som argument och returnerar samma matris men där upprepade kolumner är borttagna. Exempelvis ska `uniqcols([3 3 1 1 3 1; 1 2 1 1 2 2])` returnera matrisen `[3 3 1 1; 1 2 1 2]`. (4 p)

3. Avbildningen $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}.$$

   Med linjen L menas alla vektorer på formen $L = \{(2 + 4t, 2 + 3t)\}$, godtyckliga tal t.

V.g. vänd!

a) Avgör om punkten $P = (2, 3)$ är i bildrummet för T. (1 p)

b) Bestäm nollrummet för T. (1 p)

c) Vad avbildas linjen L på genom avbildningen T? (2 p)

4. Vi har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2z - w = 0 \\ x + y - 4z - 3w = 0 \end{cases}$$

där x, y, z och w är obekanta. Lösningsmängden till ekvationssystemet är ett delrum $V \subseteq \mathbf{R}^4$.

a) Bestäm en ortonormal bas $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ för V. (2 p)

b) Verifiera att $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$ med $\boldsymbol{x} = (-4, 2, -5, 6)$. (1 p)

c) Bestäm projektionen av vektorn $(1, 1, 1, 1)$ på delrummet V. (1 p)

5. Skolforskaren Claes van der Lambertz har studerat matematikresultaten från de senaste årens PISA-undersökningar och framkastar teorin att de svenska niondeklasselevernas matematikresultat R (se figur 1) är en kvadratisk funktion av årtalet T, och därför ansätter han följande samband

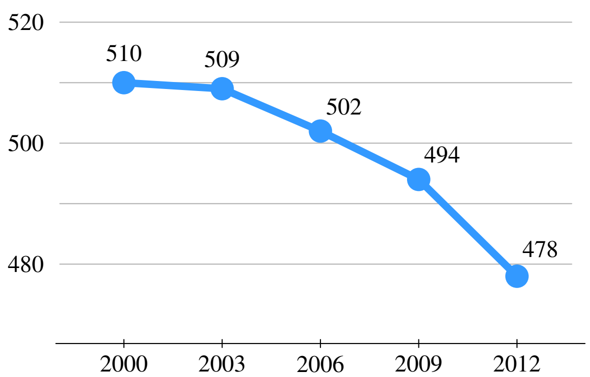
$$R = aT^2 + bT + c,$$

där a, b och c är konstanter som ska anpassas.

a) Skriv om van der Lambertz ansats så att den är centrerad kring $T = 2006$. (1 p)

b) Skatta konstanterna a, b och c i uppgift a i minsta kvadratmening till de data som finns i figur 1. (2 p)

c) Vilket resultat förutspår modellen för de svenska elevernas resultat vid nästa PISA-undersökning 2015? (1 p)



Figur 1: Svenska niondeklasselevers PISA-resultat i matematik.

6. Låt H vara ett givet plan i $\mathbf{R}^3$ genom origo och låt $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den ortogonal projektionen på planet H.

   a) Använd en normalvektor till planet H för att ge ett uttryck för $T(\boldsymbol{x})$, där $\boldsymbol{x}$ är en godtycklig vektor. (1 p)

   b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till T. (2 p)

   c) Låt B vara en godtycklig ON-bas för $\mathbf{R}^3$, och låt A vara matrisen för T i denna bas. Förklara varför A är en symmetrisk matris. (1 p)

7. Vektorerna $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1, -1)$ och $\boldsymbol{v} = (1, 1, 0, 1)$ ger en bas $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ för delrummet V av $\mathbf{R}^4$. Basbytesmatrisen från basen B till en bas C ges av matrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm vektorerna i $\mathbf{R}^4$ som utgör basen C. (4 p)

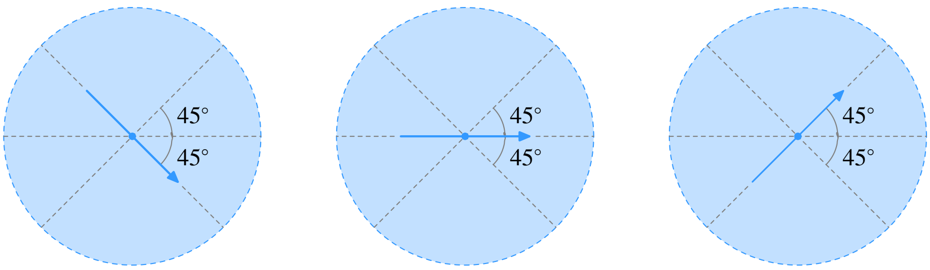
8. Låt $ABCD$ vara parallellogrammen med diagonalerna AC och BD. Punkten E ligger mitt på sträckan AB och punkten F delar sträckan CD i förhållandet 1:4, alltså $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FD}$. Sträckorna AF och DE skär varandra i punkten P. Använd vektorberäkningar för att bestämma i vilket förhållande sträckan AF delas av punkten P. (4 p)

9. Töjningstillståndet i en punkt på en fri obelastad plåt anges med den symmetriska matrisen

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix},$$

   där ε_x och ε_y är normaltöjningarna i x- resp. y-led och $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ mäter skjuvningen.

   Normaltöjningen i en allmän riktning $\boldsymbol{u}$ ges av $\varepsilon = \boldsymbol{u}^T T \boldsymbol{u}$, där $\boldsymbol{u}$ är en enhetsvektor, och har mätts upp för tre olika riktningar enligt figuren nedan.



Töjning $\varepsilon = 10 \cdot 10^{-4}$ Töjning $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-4}$ Töjning $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$

   a) Inför ett ON-system och bestäm töjningsmatrisen T i detta system. (1 p)

   b) Bestäm den eller de riktningar $\boldsymbol{u}$ i vilka normaltöjningen är som störst. (3 p)