1. a) Cylindern som har radie $r = \frac{3}{2}$ och z-axeln som axel har ekvationen

$$x^2 + y^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2.$$

Cylindern i bilden är denna cylinder men translaterad $\frac{3}{2}$ enheter i positivt y-led och har därför ekvationen

$$x^2 + \left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2.$$

b) Planet innehåller punkterna $P = (0,0,5)$ och $Q = (0,3,1)$. Vidare är vektorerna $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$ och $\overrightarrow{PQ} = (0,3,-4)$ parallella med planet. Det betyder att vektorn

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \overrightarrow{PQ} = (1,0,0) \times (0,3,-4) = (0,4,3)$$

är en normal till planet.

Vi har därmed en punkt P i planet och en normal $\boldsymbol{n}$ till planet och kan ställa upp planets ekvation,

$$\begin{aligned}
(0,4,3) \cdot \big((x,y,z) - (0,0,5)\big) &= 0\\
(0,4,3) \cdot (x,y,z-5) &= 0\\
0 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot (z-5) &= 0\\
4y + 3z &= 15.
\end{aligned}$$

2.
```
function Y = uniqcols(X)
  Y = [];
  n = size(X,2);
  for i = 1:n
    duplicate = false;
    m = size(Y,2);
    for j = 1:m
      if X(:,i) == Y(:,j)
        duplicate = true;
      end
    end
    if ~duplicate
      Y = [Y X(:,i)];
    end
  end
```

3. Se lösningen till uppgift 3 på tentamen i SF1624 den 13 januari 2014.

4. Se lösningen till uppgift 4 på tentamen i SF1624 den 13 januari 2014.

5. a) $R = a(T-2006)^2 + b(T-2006) + c$

b) Om vi stoppar in de data som finns i diagrammet får vi följande överbestämda linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned}
a \cdot (-6)^2 + b \cdot (-6) + c &= 510\\
a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c &= 509\\
a \cdot (\pm 0)^2 + b \cdot (\pm 0) + c &= 502\\
a \cdot (+3)^2 + b \cdot (+3) + c &= 494\\
a \cdot (+6)^2 + b \cdot (+6) + c &= 478
\end{aligned}$$

och i matrisform

$$\begin{pmatrix} 36 & -6 & 1\\ 9 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 9 & 3 & 1\\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\\ b\\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 510\\ 509\\ 502\\ 494\\ 478 \end{pmatrix}.$$

Genom att vänstermultiplicera båda led med transponatet av vänsterledets koefficientmatris får vi normalekvationerna

$$\begin{pmatrix} 2754 & 0 & 90 \\ 0 & 90 & 0 \\ 90 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44595 \\ -237 \\ 2493 \end{pmatrix}.$$

Från den andra ekvationen i detta system får vi direkt att $b = -\frac{237}{90}$. Den första och tredje ekvationen bildar ett linjärt ekvationssystem för a och c ,

$$\begin{pmatrix} 2754 & 90 \\ 90 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44595 \\ 2493 \end{pmatrix}.$$

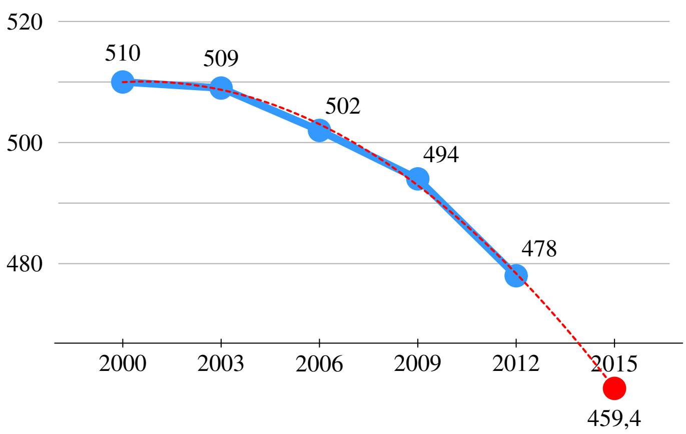
Med Cramers regel får vi

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 44595 & 90 \\ 2493 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2754 & 90 \\ 90 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot \begin{vmatrix} 44595 & 18 \\ 2493 & 1 \end{vmatrix}}{5 \cdot \begin{vmatrix} 2754 & 18 \\ 90 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{279}{1134}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2754 & 44595 \\ 90 & 2493 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2754 & 90 \\ 90 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2852172}{5670}.$$

c) Med konstanter a , b och c enligt uppgift b förutspår modellen att PISA-resultatet 2015 blir

$$R(2015) = -\frac{279}{1134} \cdot 9^2 - \frac{237}{90} \cdot 9 + \frac{2852172}{5670} = \frac{2297}{5} = 459{,}4.$$

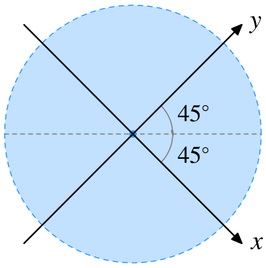


6. Se lösningen till uppgift 6 på tentamen i SF1624 den 13 januari 2014.

7. Se lösningen till uppgift 7 på tentamen i SF1624 den 13 januari 2014.

8. Se lösningen till uppgift 8 på tentamen i SF1624 den 13 januari 2014.

9. a) Välj nedanstående ON-system



Då är normaltöjningen i x- och y-led $\varepsilon_x = 10\cdot10^{-4}$ resp. $\varepsilon_y = 2\cdot10^{-4}$ och vi har

$$T = \begin{pmatrix} 10\cdot10^{-4} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 2\cdot10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Normaltöjningen i riktningen $\boldsymbol{u} = (1,1)/\sqrt{2}$ är $\varepsilon = 9\cdot10^{-4}$ och det betyder att

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\cdot10^{-4} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 2\cdot10^{-4} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9\cdot10^{-4}.$$

Vänsterledet i denna likhet är lika med

$$\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\cdot10^{-4} + \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} + 2\cdot10^{-4} \end{pmatrix} = 6\cdot10^{-4} + \varepsilon_{xy},$$

vilket ger att

$$6\cdot10^{-4} + \varepsilon_{xy} = 9\cdot10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{xy} = 3\cdot10^{-4}.$$

I detta ON-system är alltså töjningsmatrisen

$$T = 10^{-4}\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Töjningsmatrisen har följande egenvärden och motsvarande egenvektorer:

Egenvärde	Egenvektor
$\lambda_1 = 1\cdot10^{-4}$	$\boldsymbol{v}_1 = (1,-3)$
$\lambda_2 = 11\cdot10^{-4}$	$\boldsymbol{v}_2 = (3,1)$

Det betyder att i ett ON-system B som har koordinataxlar i riktningarna $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ ges töjningen i en riktning $(\boldsymbol{u})_B = (u_1, u_2)$ av

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 11\cdot10^{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 10^{-4}(u_1^2 + 11u_2^2).$$

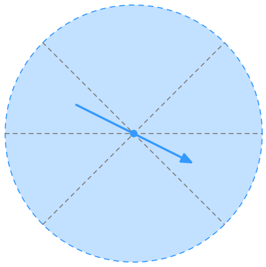
Eftersom det nya koordinatsystemet är ett ON-system så är $|\boldsymbol{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2$ och

$$\begin{aligned} \varepsilon = 10^{-4}(u_1^2 + 11u_2^2) &\le 10^{-4}(11u_1^2 + 11u_2^2) \\ &= 10^{-4}\cdot 11 \cdot |\boldsymbol{u}|^2 \\ &= 11\cdot10^{-4}, \end{aligned}$$

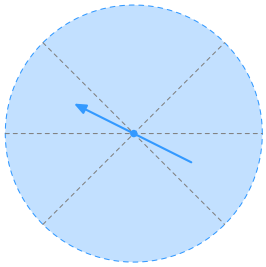
dvs. töjningen kan inte vara större än $11\cdot10^{-4}$.
Eftersom vi i riktningarna $(\boldsymbol{u})_B = (0,\pm1)$ har töjningarna

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \pm1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\cdot10^{-4} & 0 \\ 0 & 11\cdot10^{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm1 \end{pmatrix} = 11\cdot10^{-4}.$$

så är normaltöjningen som störst i riktningarna $(\boldsymbol{u})_B = (0, \pm 1)$, dvs. i riktningarna $\pm \boldsymbol{v}_2$.



Töjning $\varepsilon = 11 \cdot 10^{-4}$



Töjning $\varepsilon = 11 \cdot 10^{-4}$