REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Tentamen 2014–01–15, kl. 14.00–19.00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK (Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsv.)
Räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att övningsmaterial (övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig: Jonas Mårtensson, 070-190 97 98

Resultat: Finns på Studerande-expeditionen (STEX) 2014-02-05

Utlämning: Tentamen kan hämtas ut vid Studerande-expeditionen, plan 3, Osquldas väg 10.

Lycka till!

---

1. (a) Systemet

$$G(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

återkopplas med en P-regulator, $F(s) = K = 2$.

- Beräkna det statiska reglerfelet när referensen, $r(t)$ är ett steg. (2p)
- Bestäm utsignalen $y(t)$ för referenssignalen $r(t) = 2\sin(t)$ när alla transienter har dött ut. (2p)

(b) Rita ett blockdiagram som representerar systemet

$$Y(s) = \frac{1 - G(s)H(s)}{1 + G(s)F_y(s)}V(s) + \frac{G(s)F_r(s)}{1 + G(s)F_y(s)}R(s)$$

där Y, V och R är utsignal, störsignal och referenssignal. Använd separata block för respektive överföringsfunktion G, H, F_r och F_y. (2p)

(c) Betrakta den olinjära differentialekvationen

$$l\ddot{\theta}(t) - u(t)\cos(\theta(t)) = g\cos(\theta(t) - \pi/2)$$

Hitta de jämviktspunkter som finns för $u_0 = 0$ och linjärisera systemet kring en av dessa. Skriv det linjära systemet på tillståndsform. (4p)

2. Vi ska studera stabilisering av den inverterade pendeln som finns återgiven i Figur 1. För små vinklar θ ges en linjäriserad tillståndsmodell av

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} F$$

där x är vagnens position, θ är pendelns vinkel från vertikalaxeln, och F är den kraft som appliceras på vagnen. M och m är massan hos vagnen respektive pendeln, l är pendelns längd, och g är tyngdaccelerationen.

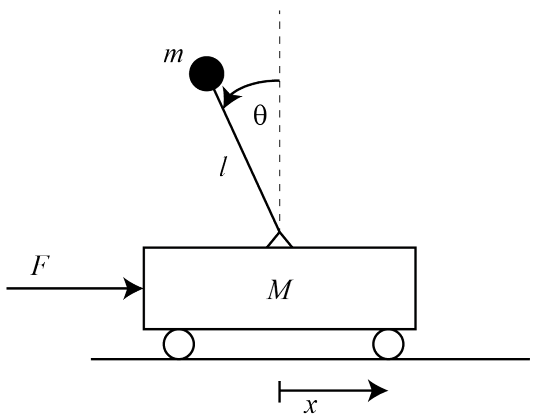
Bortse först från vagnens position x och betrakta endast ekvationerna för tillståndsvariablerna θ och $\dot{\theta}$.

(a) Visa att det inte går att stabilisera pendeln genom att endast återkoppla från vinkeln θ med regulatorn $F = -l_1\theta$, men att det går att stabilisera pendeln genom att återkoppla från både θ och $\dot{\theta}$ med regulatorn $F = -l_1\theta - l_2\dot{\theta}$. För vilka värden på l_1 och l_2 är pendeln asymptotiskt stabil? (4p)

Betrakta nu hela tillståndsmodellen.

(b) Antag att en stabiliserande regulator från uppgift (a) används för att reglera pendeln. Vad händer med $x(t)$ och $\dot{x}(t)$ om systemet startas från ett initialtillstånd som ges av $\theta(0) = \theta_o \neq 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $x(0) = 0$ och $\dot{x}(0) = 0$? (3p)

(c) Går det att stabilisera både vagnen och pendeln genom att återkoppla från alla fyra tillstånden? (3p)



Figur 1: Inverterad pendel.

3. En välkänd metod för att ställa in en PID-regulator går under namnet Ziegler-Nichols. Metoden går ut på att förstärkningen för en P-regulator ökas tills systemet självsvänger med konstant amplitud och denna förstärkning K_0 samt svängningens periodtid T_0 noteras. Parametrarna för PID-regulatorn

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

fås därefter ur följande tabell

	K_p	T_I	T_D
PID	$0.6K_0$	$0.5T_0$	$0.125T_0$
PD	$0.55K_0$	∞	$0.15T_0$
PI	$0.45K_0$	$0.85T_0$	0
P	$0.5K_0$	∞	0

Betrakta ett system vars överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

(a) Ta fram en PID-regulator enligt ovanstående metod och visa att den ger en skärfrekvens på 0.77 rad/s och en fasmarginal på 26^o. (4p)

(b) Regulatorn i uppgift (a) är lagon snabb, men överslängen är alldeles för stor. Ta fram en alternativ regulator som ger samma stigtid men betydligt mindre översläng. De stationära felen vid steg och ramp som referens får inte försämras jämfört med PID-regulatorn. (6p)

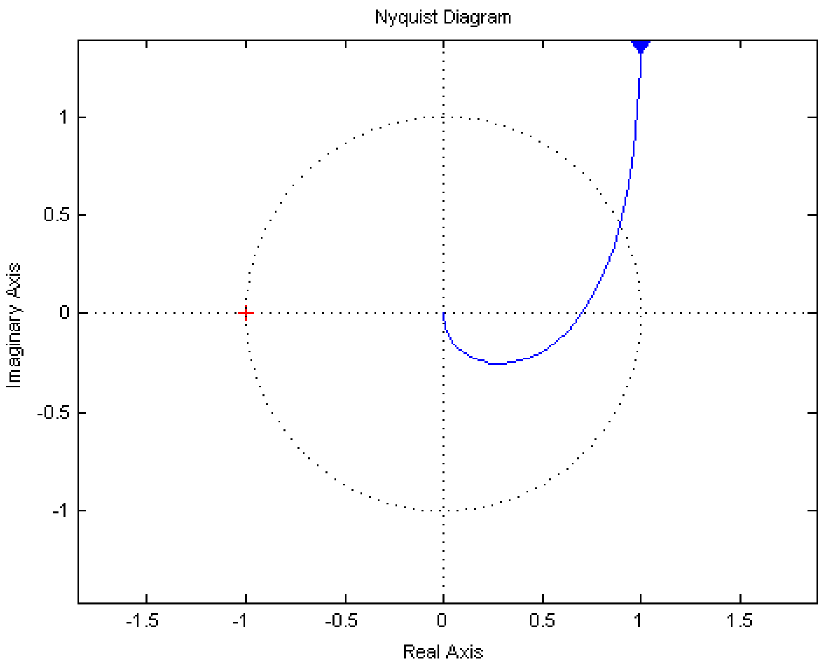
4. Systemet

$$G(s) = 0.7\frac{s-0.5}{s+1}$$

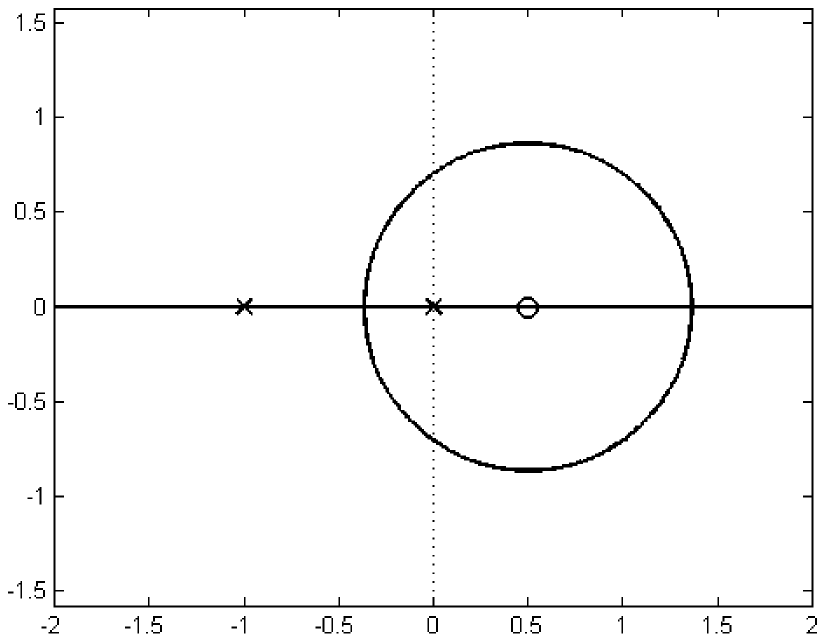
regleras med en I-regulator, $F(s) = K/s$. Nyquistkurvan $G(i\omega)F(i\omega)$ för $K = 1$ finns återgiven i Figur 2. Skärningen med reella axeln sker för $\omega = 0.707$ rad/s och skärningen med enhetscirkeln sker vid $\omega = 0.422$ rad/s.

(a) Använd det fullständiga Nyquistkriteriet och bestäm för vilka K, både negativa och positiva, som det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt. (6p)

(b) I Figur 3 visas en rotort för både positiva och negativa K. Rita ut med pilar hur polernas flyttas när K går från $-\infty$ till $+\infty$. Markera tydligt var K är positiv respektive negativ och markera också intervallen där systemet är stabilt. Motivera ditt svar. (4p)



Figur 2: Nyquistkurvan $G(i\omega)$.



Figur 3: Rotort med avseende på K, både positiva och negativa

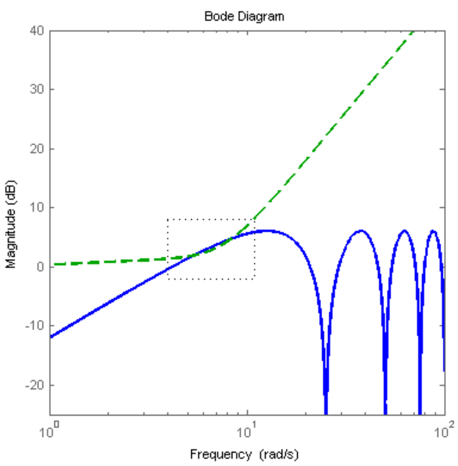
5. Antag att en stabiliserande regulator $F(s)$ har tagits fram för att reglera systemet $G(s)$, där

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 12s + 27)} \quad \text{och} \quad F(s) = \frac{5s + 10}{s}$$

Nu visar det sig att regulatorn har en fördröjning så den verkliga regulatorn ges av

$$F^o(s) = F(s)e^{-s\tau}$$

(a) Använd robusthetskriteriet för att ta fram ett villkor för stabilitet när systemet återkopplas med $F^o(s)$. Använd sedan Figur 4, som visar $\frac{|1+G(i\omega)F(i\omega)|}{|G(i\omega)F(i\omega)|}$ (streckad linje) och $|e^{-i\omega\tau} - 1|$ för $\tau = 0.25$ (heldragen linje), för att dra en slutsats om systemets stabilitet när tidsfördröjningen i regulatorn är 0.25 sekunder? (3p)

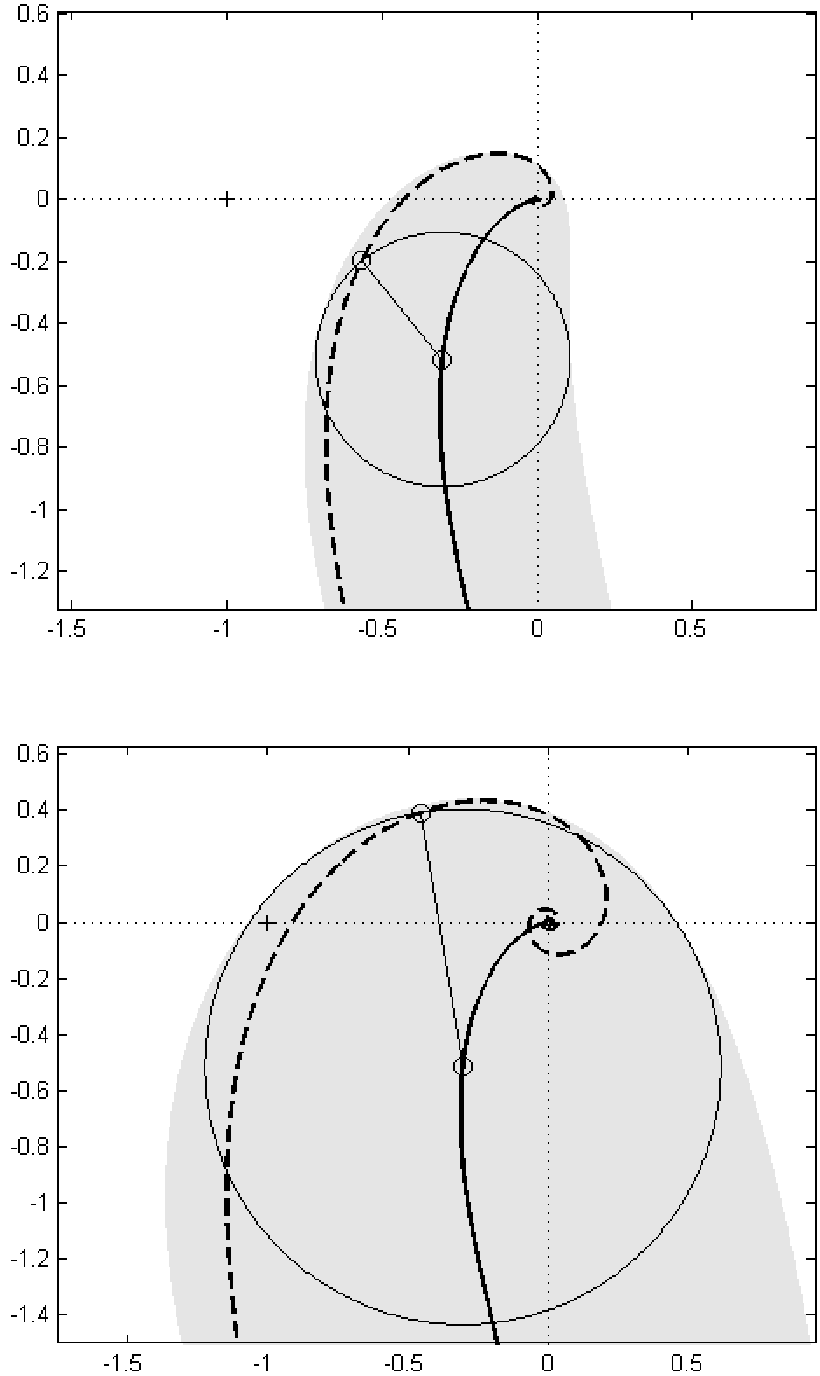


Figur 4: Den högra plotten är en förstoring av det streckade området i den vänstra plotten.

(b) Kretsförstärkningen $G(s)F(s)$ har en skärfrekvens på 4.52 rad/s och en fasmarginal på 73 grader. Är systemet stabilt när tidsfördröjningen i regulatorn är 0.25 sekunder? (2p)

(c) Betrakta Figur 5, där Nyquistkurvor har plottats för FG (heldragen) och F^oG (streckad). Den övre bilden är för $\tau = 0.1$ och den nedre bilden är för $\tau = 0.25$. De små cirklarna markerar frekvensen $\omega = 7$ rad/s för respektive funktion. Längden på linjen som förbinder punkterna, vilket är radien hos den stora cirkeln, blir således $|(F^o(i\omega) - F(i\omega))G(i\omega)|$. Det skuggade området är det som täcks in av den stora cirkeln om ω varieras mellan 0 och ∞.

Förklara robusthetskriteriet samt eventuella skillnader mellan svaren i deluppgift (b) och (c) med utgångspunkt från dessa bilder. (5p)



Figur 5: Den övre plotten är för $\tau = 0.1$ och den undre för $\tau = 0.25$.