

REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Tentamen 2014-01-15

Lösningförslag

1. (a) Överföringsfunktionen från r till e ges av

$$S = \frac{1}{1 + FG} = \frac{s + 3}{s + 3 + 2(s + 2)} = \frac{s + 3}{3s + 7}$$

som är stabil varför vi kan använda slutvärdessatsen och räkna ut

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = 3/7 = 0.43.$$

Överföringsfunktionen från referens till utsignal är

$$G_c = \frac{FG}{1 + FG} = \frac{2s + 4}{s + 3 + 2(s + 2)} = \frac{2s + 4}{3s + 7}$$

Stationärt ges utsignalen av $y(t) = 2|G_c(i)|\sin(t + \arg G_c(i))$, där

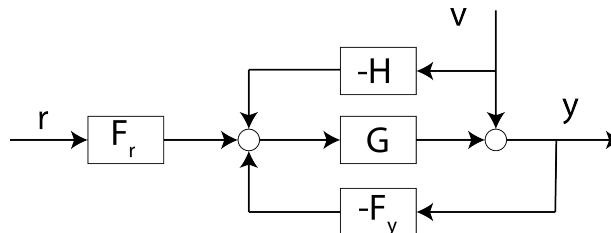
$$|G_c(i)| = \frac{|2i + 4|}{|3i + 7|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{58}} = 0.59$$

$$\arg G_c(i) = \arctan 2/4 - \arctan 3/7 = 0.059$$

Svar:

- Det statiska reglerfelet är 0.43.
- Utsignalen blir $y(t) = 1.17\sin(t + 0.059)$

- (b) Se bild



- (c) I jämviktspunkten är $\ddot{\theta} = 0$ (och $\dot{\theta} = 0$) vilket ger att $\cos(\theta_o - \pi/2) = 0$, dvs $\theta_o = k\pi$, $k = 0, 1, \dots$. Vi väljer att linjärisera kring $\theta_o = 0$. Inför tillstånden $x_1 = \theta$ och $x_2 = \dot{\theta}$. Då kan vi skriva systemet på tillståndsform

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \cos(x_1 - \pi/2) + \frac{1}{l} u \cos(x_1)\end{aligned}$$

Den första ekvationen är redan linjär, den andra linjäriseras till

$$\dot{x}_2 \approx -\frac{g}{l} \sin(\theta_o - \pi/2)x_1 - \frac{1}{l} u_o \sin(\theta_o)x_1 + \frac{1}{l} \cos(\theta_o)u = \frac{g}{l}x_1 + \frac{1}{l}u$$

Svar:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}x_1 + \frac{1}{l}u\end{aligned}$$

2. (a) Systemmatrisen för det återkopplade systemet blir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(M+m)g-l_1}{Ml} & -\frac{l_2}{Ml} \end{bmatrix}$$

som har karakteristisk ekvation $\lambda(\lambda + \frac{l_2}{Ml}) - \frac{(M+m)g-l_1}{Ml}$. Ett polynom $\lambda^2 + a\lambda + b$ har rötter strikt i vänster halvplan om och endast om $a > 0$ och $b > 0$. Det ger att systemet är stabilt om $l_2 > 0$ och $l_1 > (M+m)g$. Med $l_2 = 0$ (dvs med $F = -l_1\theta$) går det alltså inte att stabilisera pendeln.

- (b) Eftersom pendeln antags vara asymptotiskt stabil så kommer θ och $\dot{\theta}$ gå mot 0 när t växer. Det innebär att även \ddot{x} kommer gå mot 0 och att \dot{x} kommer nå ett konstant värde. Den inledande transienten för θ och $\dot{\theta}$ gör dock att \ddot{x} är skilt från 0 under transienten vilket gör att \dot{x} rör sig från sitt initialtillstånd och stannar på ett värde som är skilt från 0. Alltså kommer vagnen röra sig med en konstant hastighet och positionen x växer obegränsat.

- (c) Låt $a_1 = \frac{(M+m)g}{Ml}$, $a_2 = \frac{mg}{M}$, $b_1 = \frac{1}{Ml}$ och $b_2 = \frac{1}{M}$. Då blir styrbarhetsmatrisen

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & 0 & a_1b_1 \\ b_1 & 0 & a_1b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2b_1 \\ b_2 & 0 & a_2b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

som har full rang om $a_1b_2 \neq a_2b_1$, dvs om $M \neq 0$ vilket vi får anta gäller. Eftersom systemet är styrbart kan vi välja godtyckliga poler med hjälp av tillståndsåterkoppling. Svaret är alltså ja; pendeln och vagnen går att stabilisera.

3. (a) Det återkopplade systemet med P-regulator ges av

$$G_c = \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2 + K_0} = \frac{s(s+1)^2}{s^3 + 2s^2 + s + K_0}$$

Systemet har tre poler och om det ska självsvänga stationärt måste två av polerna ligga på imaginära axeln och den tredje måste vara stabil och ligga på negativa reella axeln. För någon frekvens ω måste det alltså gälla att

$$0 = (i\omega)^3 + 2(i\omega)^2 + i\omega + K_0 = -i\omega^3 - 2\omega^2 + i\omega + K_0$$

vilket ger två ekvationer (real- och imaginärdelarna måste båda vara 0):

$$\omega^3 = \omega \Rightarrow \omega = 1$$

$$K_0 = 2\omega^2 = 2$$

Med $K_0 = 2$ får vi polpolynomet

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s^2 + 1)(s + 2)$$

och vi kan kontrollera att den tredje polen är stabil ($s = -2$).

Vinkelfrekvens $\omega = 1$ rad/s motsvarar en periodtid på $T_0 = 2\pi$. Detta ger parametrarna till PID-regulatorn enligt tabellen:

$$K_p = 1.2, \quad T_I = \pi, \quad T_D = \pi/4$$

och vi kan räkna ut (numeriskt med räknare)

$$G(0.77i)F(0.77i) = -0.8980 - 0.4311i$$

och vi kan verifiera att beloppet är $1(\sqrt{0.8980^2 + 0.4311^2})$ och att argumentet är -154° ($\arctan 0.4311/0.8980 - 180^\circ$)

- (b) Vi konstruerar en lead/lag-regulator:

$$F(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

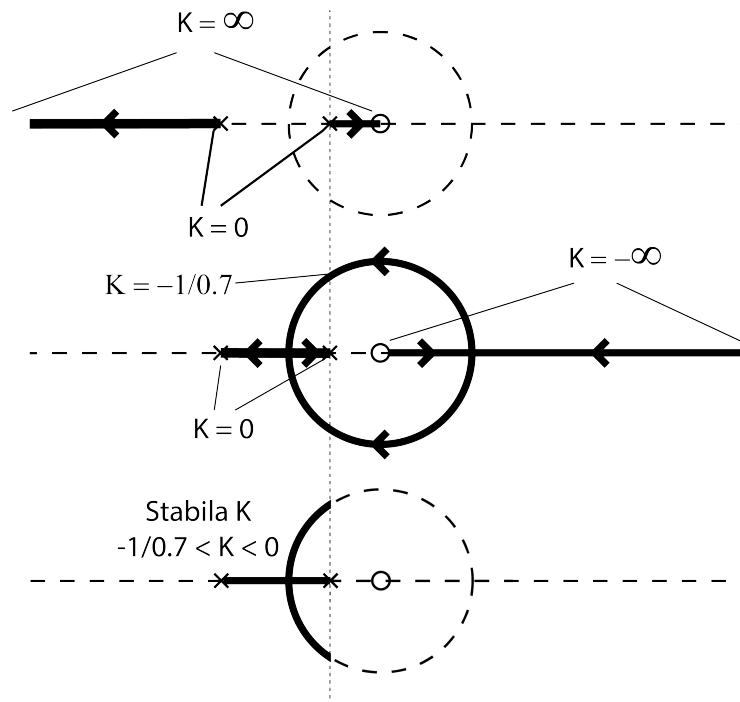
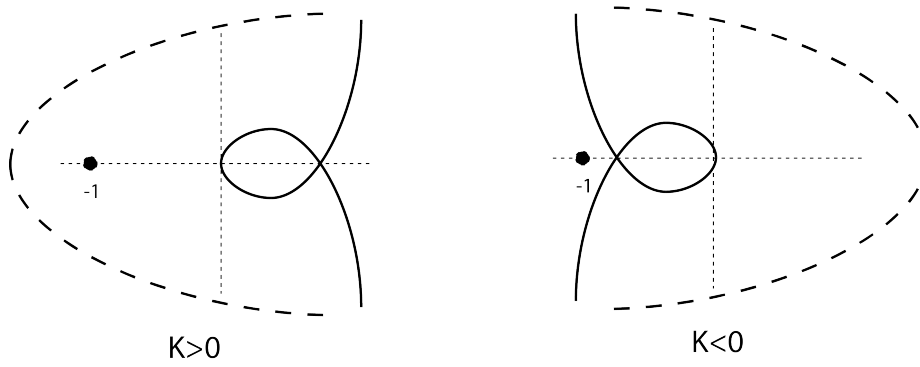
Samma stigtid = oförändrad skärfrekvens: $\omega_c = 0.77$ rad/s. Betydligt mindre översläng = betydligt större fasmarginal, t.ex $\varphi_m = 70^\circ$ (med marginal för lag-länk). Vi beräknar $\arg G(0.77i) = -165^\circ$ vilket gör att vi måste höja fasen med $55^\circ \Rightarrow \beta = 0.1$ och $\tau_D = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\beta}} = 4.1$. Eftersom både G och PID-regulatorn har varsin integrator så kommer felen vid steg och ramp båda vara 0. Vi behöver alltså lägga till en lag-länk med en ren integrator, dvs $\gamma = 0$. Vi väljer $\tau_I = 10/\omega_c = 13$. Förstärkningen K väljs så att vi får rätt skärfrekvens: $K = \frac{\sqrt{\beta} \tau_I \omega_c}{|G(0.77i)| |\tau_I \omega_c i + 1|} = 0.38$.

4. (a) Vi börjar med positiva K . Eftersom $L := GF$ inte har poler i HHP så blir kravet att Nyquistkurvan inte omsluter -1 . Vi beräknar hur kurvan γ i Figur 3.24 i kursboken avbildas. Positiva imaginära axeln har vi fått given, den negativa imaginära fås genom att spegla i reella axeln. Vi har att $|L(Re^{i\omega})| \rightarrow 0$ då $R \rightarrow \infty$ så den stora cirkelbågen avbildas på origo. För den lilla halvbågen får vi (för små r) att

$$L(re^{i\omega}) \approx \frac{-0.35}{re^{i\omega}} = \frac{0.35}{r} e^{i(\pi-\omega)}$$

När ω löper i negativ riktning från $\pi/2$ till $-\pi/2$ så avbildas den lilla cirkelbågen på en stor (oändlig då $r \rightarrow 0$) cirkelbåge som går i positiv riktning från $\pi/2$ till $3\pi/2$, dvs i en stor båge över vänster halvplan. Oavsett hur den kurvan skalas så omsluts punkten -1 . Det finns alltså inga positiva K som ger ett stabilt system. För negativa K får vi spegla hela den avbildade kurvan i reella axeln (egentligen också den imaginära, men kurvan är ju symmetrisk så det gör ingen skillnad). Låt $N = -K$, då motsvarar den speglade kurvan $N = 1$. Skärningspunkten på negativa reella axeln ges av $-L(0.707i) = -0.7$. Då ser vi att punkten -1 omsluts om kurvan skalas med en faktor större än $1/0.7$. Systemet är alltså stabilt om $0 < N < 1/0.7$, eller $-1/0.7 < K < 0$. Se bild för skissade Nyquistkurvor.

- (b) Polpolynomet ges av $s(s+1) + 0.7K(s-0.5)$. Vi börjar med positiva K som är normalfallet. Rotorten har alltså startpunkter i $s = 0$ och $s = -1$ och en slutpunkt i $s = 0.5$. Det finns en asymptot i riktning π . De delar av reella axeln som är med är de med udda antal start/slutpunkter till höger, dvs $(-\infty, -1]$ och $[0, 0.5]$. Dessa delar av reella axeln utgör hela rotortemnet för $K > 0$, se bild på nästa sida. För negativa K förstår vi att det är den resterande delen av rotorten som gäller. Se Appendix 3.A i kursboken så finner ni att de delar av reella axeln som är med är precis de som inte är med för positiva K . Start-/slutpunkter är förstås samma, men asymptoten går i riktning 0 istället. Rotorten korsar imaginära axeln för $K = -1/0.7$. Se bild nästa sida.



5. (a) Först noterar vi att F^o kan skrivas

$$F^o(s) = F(s)e^{-s\tau} = F(s)(1 - e^{-s\tau} - 1) := F(s)(1 - \Delta_F(s))$$

dvs $\Delta_F(s) = e^{-s\tau} - 1$. Sen kontrollerar vi att villkoren för robusthetskriteriet är uppfyllda: vi har en stabil återkoppling utan modellfel; modellfelet inför inga nya poler i HHP för kretsförstärkningen; kretsförstärkningen går mot 0 när $|s|$ går mot oändligheten, både utan och med modellfel. Då kan vi ställa upp robusthetskriteriet som säger att systemet med modellfel är stabilt om

$$|\Delta_F(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} = \frac{|1 + F(i\omega)G(i\omega)|}{|F(i\omega)G(i\omega)|}, \forall \omega$$

Från de givna plottarna ser vi att det inte är uppfyllt för alla ω och då kan ingen slutsats om stabilitet dras från robusthetskriteriet, (som bara är ett tillräckligt villkor).

- (b) Tidsfördröjningen påverkar inte amplituden så skärfrekvensen blir oförändrad. Tidsfördröjningen ger ett negativt fasbidrag

$$\arg e^{-i\omega\tau} = -\omega\tau = -4.52 * 0.25 \text{rad} = 65^\circ$$

Eftersom fasmarginalen var 73° så finns fortfarande 8° fasmarginal kvar så systemet förblir stabilt (men prestanda kommer ha påverkats signifikant).

- (c) Robusthetskriteriet baseras på Nyquistkriteriet. Den nominella kretsförstärkningen förutsätts vara stabil, så Nyquistkurvan ligger till höger om punkten -1. Villkoret för stabilitet är att modellfelet inte flyttar Nyquistkurvan så att den hamnar till vänster om -1. Istället för att kontrollera det exakta utseendet på modellfelet tittar man här enbart på beloppet. Om beloppet av modellfelet i en viss frekvens är mindre än avståndet till -1 från den nominella kretsförstärkningen i den frekvensen så ligger den punkten fortfarande till höger om -1. Om det är uppfyllt för alla frekvenser är systemet garanterat stabilt. Det skuggade området i bilden visar detta kriterium: om hela det skuggade området ligger till höger om -1 så är systemet garanterat stabilt. Det verkliga modellfelet ligger alltid innanför det skuggade området men behöver inte ligga på randen. Detta gör att kriteriet bara är tillräckligt och inte nödvändigt. Även om -1 ligger i det skuggade området så kan det verkliga modellfelet ligga till höger. Det är precis vad som hände i den här uppgiften och det fallet visas i den nedre plotten för $\tau = 0.25$. I det fallet kan man alltså inte dra någon slutsats från robusthetskriteriet. I den övre plotten däremot hade man kunnat dra slutsatsen att systemet var stabilt för $\tau = 0.1$ eftersom hela det skuggade området ligger till höger om -1.