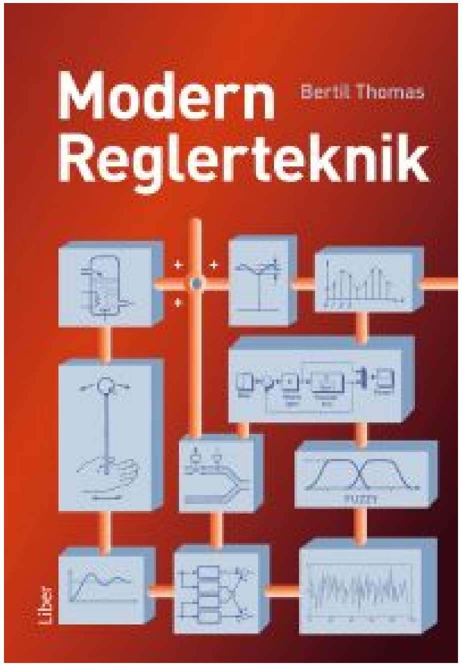
Reglerteknik **6**

Kapitel 10



Köp bok och övningshäfte på kårbokhandeln

William Sandqvist william@kth.se

Föreläsning 6 kap 10

Reglersystemets egenskaper

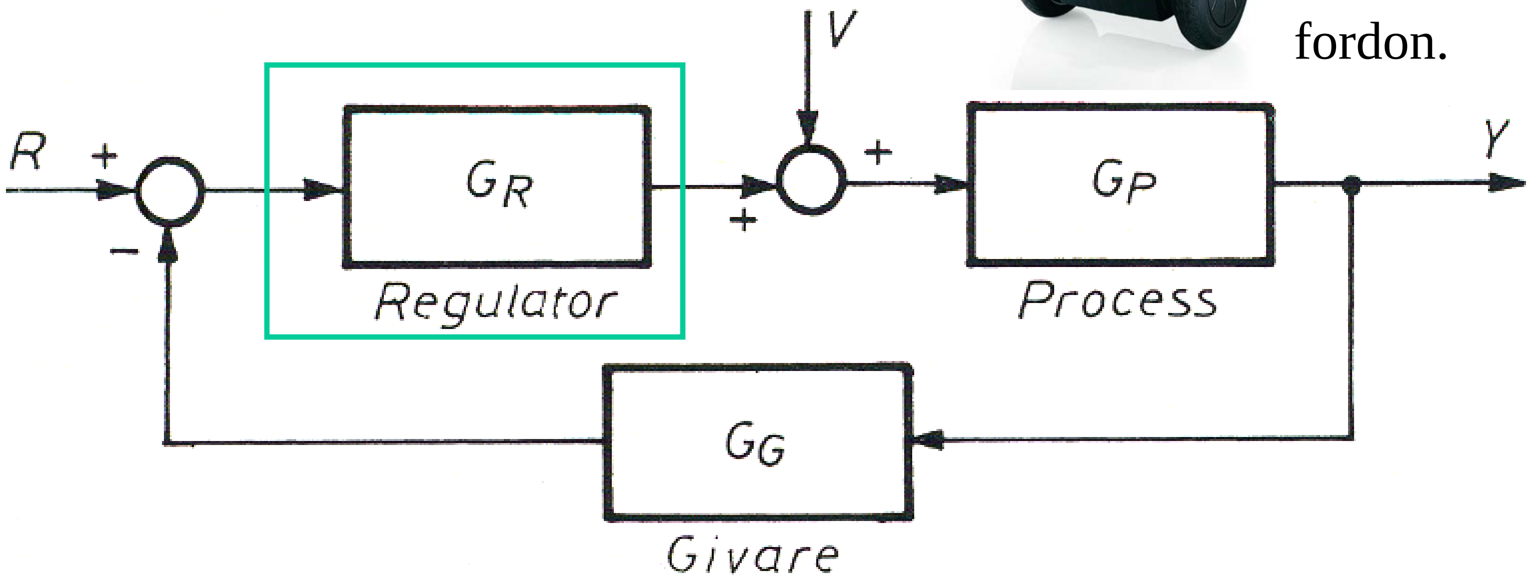
Stabilitet är den viktigaste egenskapen. Ett ostabilt system är *oanvändbart*.

William Sandqvist william@kth.se

Stabilitet är viktigast

Regulatorn är den del av överförings-funktionen man kan påverka. Med den kan man kompensera för ”brister” i processens överföringsfunktion.

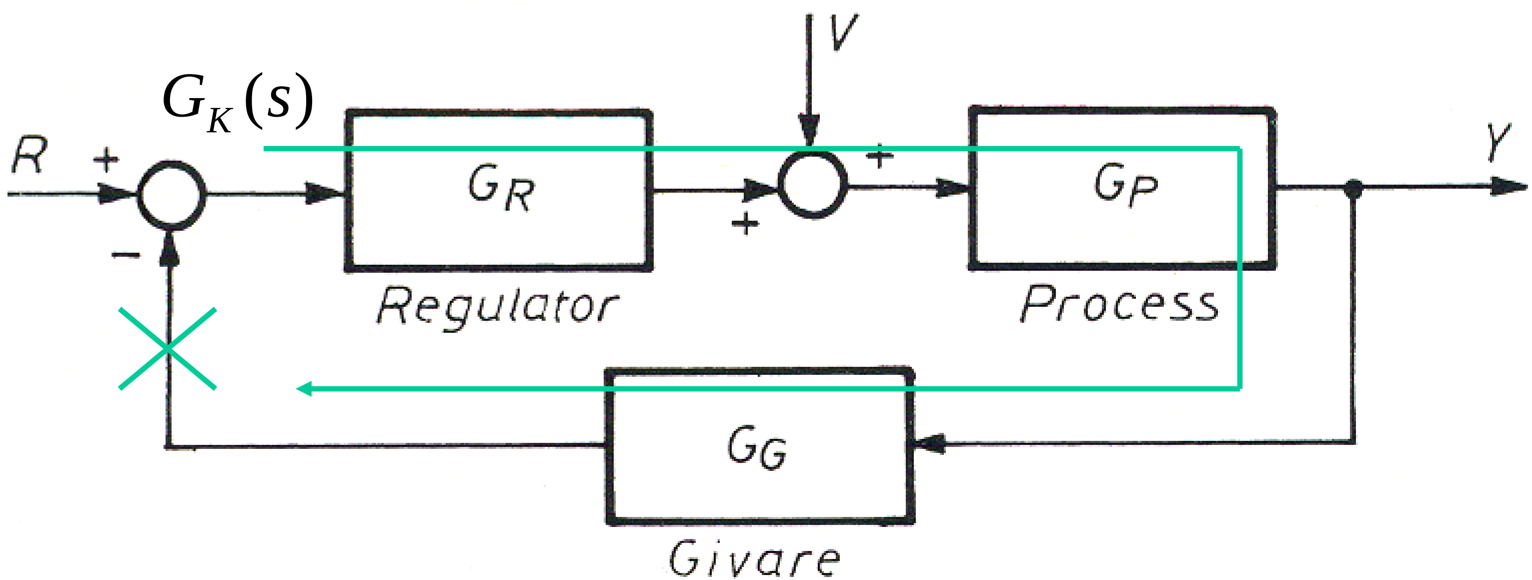
Segway är i sig instabil, det är **regulatorn** som gör den till ett användbart fordon.



Stabilitet är viktigast

Men även om processen är stabil, kan felaktiga regulatorinställningar resultera i ett ostabilt system!

Kretsöverföring: $G_K(s) = G_R(s) \cdot G_P(s) \cdot G_G(s)$ (Open loop)

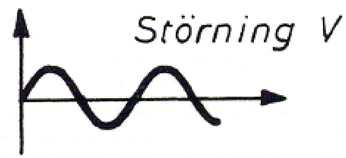


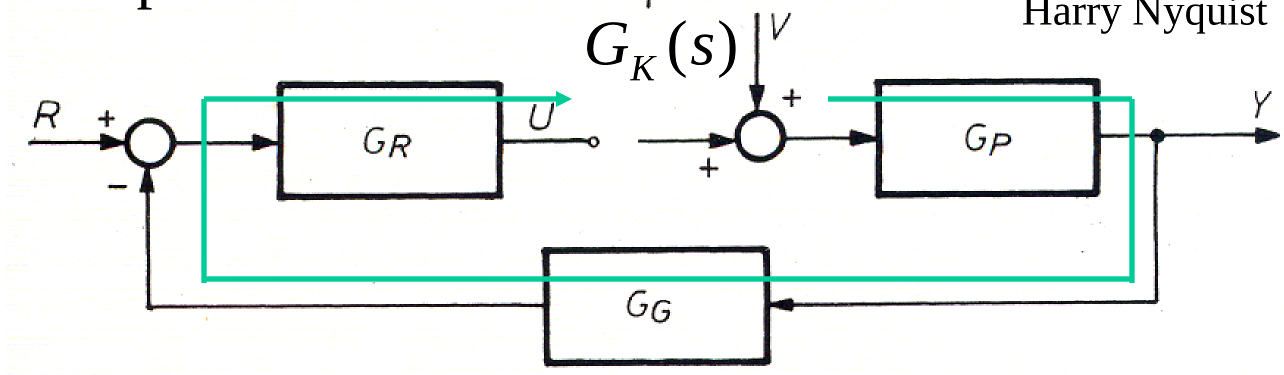
Nyquistkriteriet för stabilitet

(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

Harry Nyquist

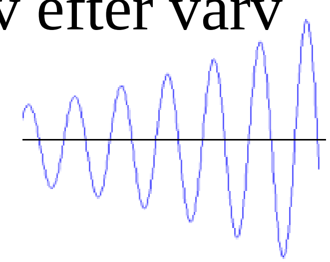
Man studerar det **öppna systemet** G_K. Kommer en *sinusformad* störning att växa till en ”större kopia” efter ett varv?





I så fall kommer den, i ett **slutet system**, att växa varv efter varv helt ostabilt!

U



William Sandqvist william@kth.se

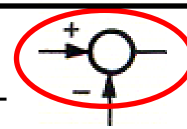
Nyquistkriteriet för stabilitet

(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

- Finns det något ω då insignal och utsignal till G_K är i ”fas”?

$$\angle \underline{G}_K(j\omega) = \varphi_K(\omega)$$

$$\varphi_K(\omega_\pi) = -180°$$

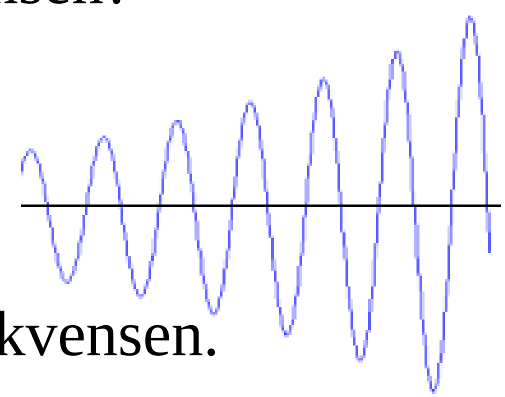
$-180°$ +  $= -360°$ dvs. i fas

$-180°$ (= kopia)!

- Har amplituden *ökat* något vid den frekvensen?

$$\left|\underline{G}_K(j\omega)\right| = A_K(\omega) > 1$$

i så fall blir det slutna systemet instabilt!

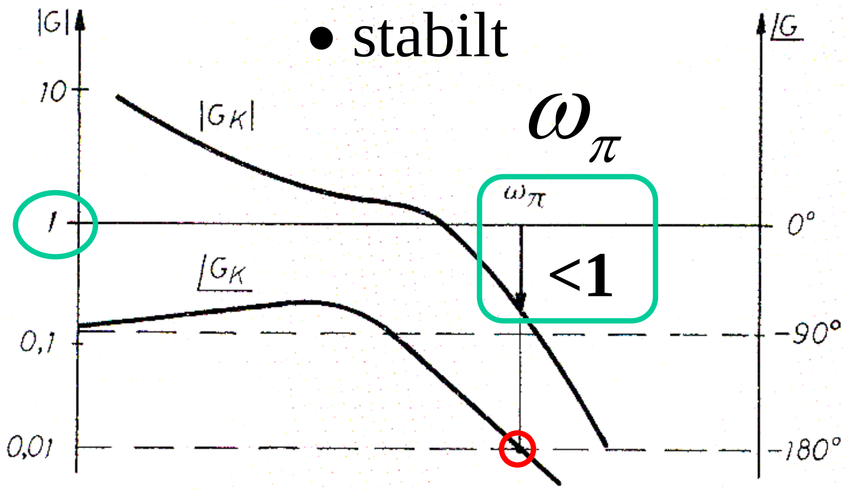


- Detta ω kallas för ω_π – egensvängningsfrekvensen.

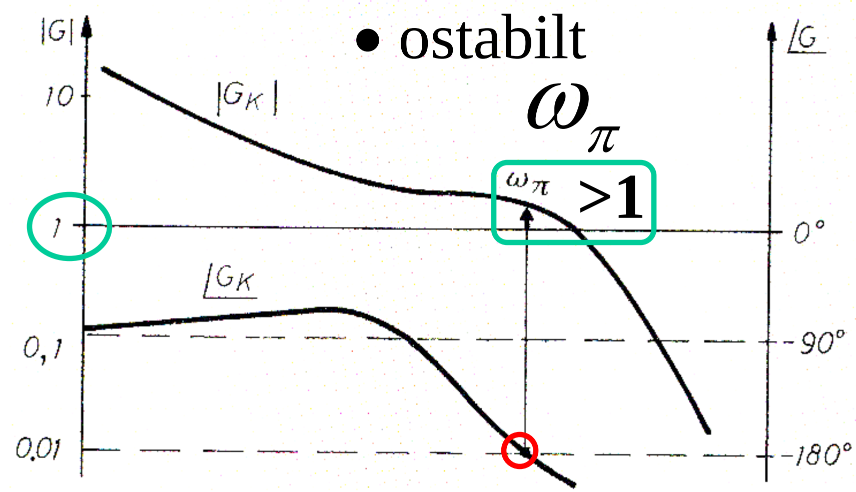
Nyquistkriteriet för stabilitet

(eg. Det förenklade Nyquistkriteriet)

$$\boxed{\varphi_K(\omega_\pi) = -180^\circ \quad A_K(\omega_\pi) < 1 \quad \mathit{stabilt}}$$



Stabilt system $|G_K(\omega_\pi)| < 1$



Instabilt system $|G_K(\omega_\pi)| > 1$

Stabilitets**marginaler**

Hur stabilt är ett ”stabilt” system? Om systemet slits, eller utsätts för extrema temperaturer så att överföringsfunktionen blir något förändrad – kan det då bli instabilt?

Man vill ha siffervärden på hur långt ifrån ”stabilitetsgränsen” som systemet ligger.

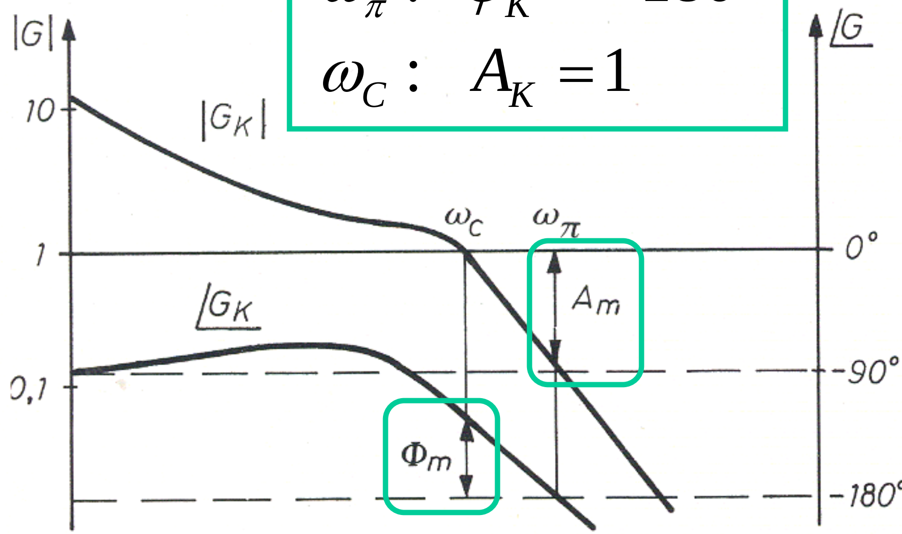
- Amplitudmarginal

$$A_m = \frac{1}{A_K(\omega_\pi)}$$

- Fasmarginal

$$\Phi_m = 180° + \varphi_K(\omega_C)$$

$$\omega_\pi : \quad \varphi_K = -180°$$
$$\omega_C : \quad A_K = 1$$



Typiskt:

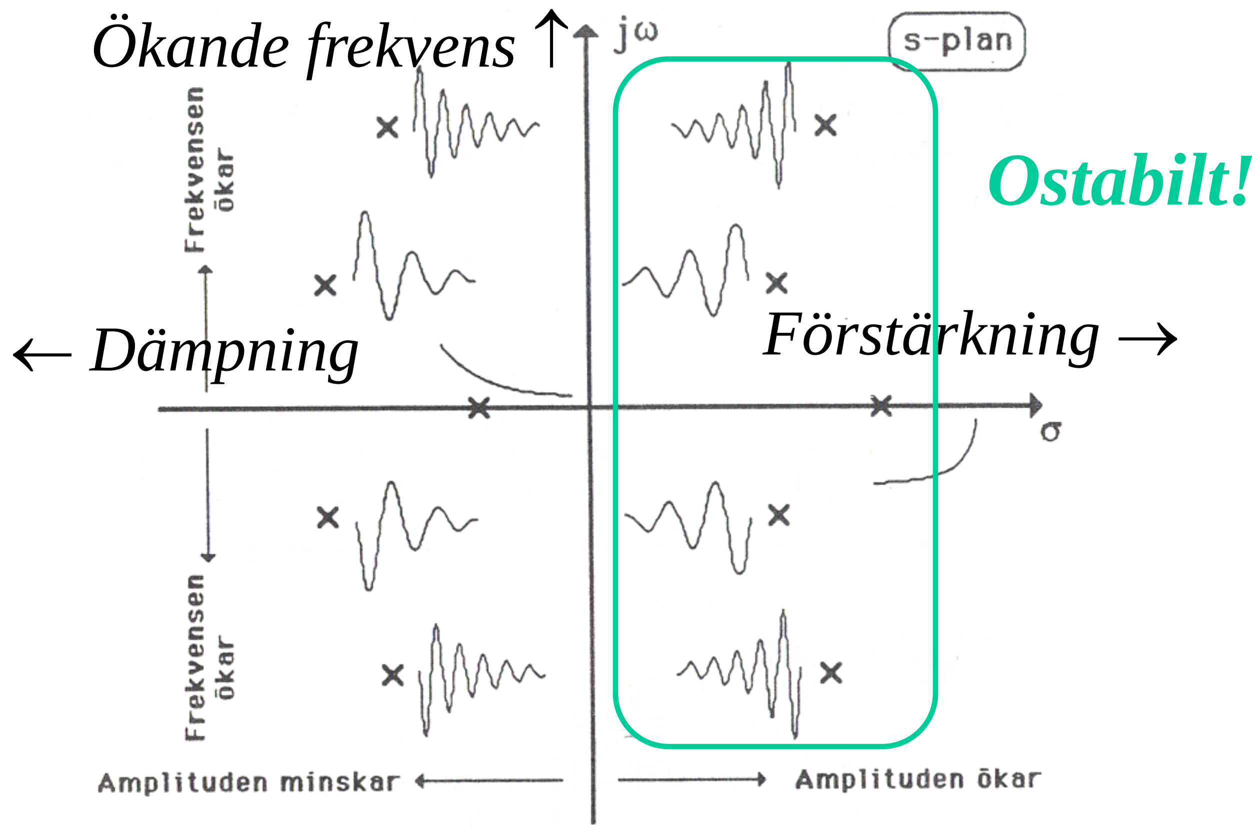
A_m 2…5

Φ_m 30°…60°

Polbestämning för stabilitet

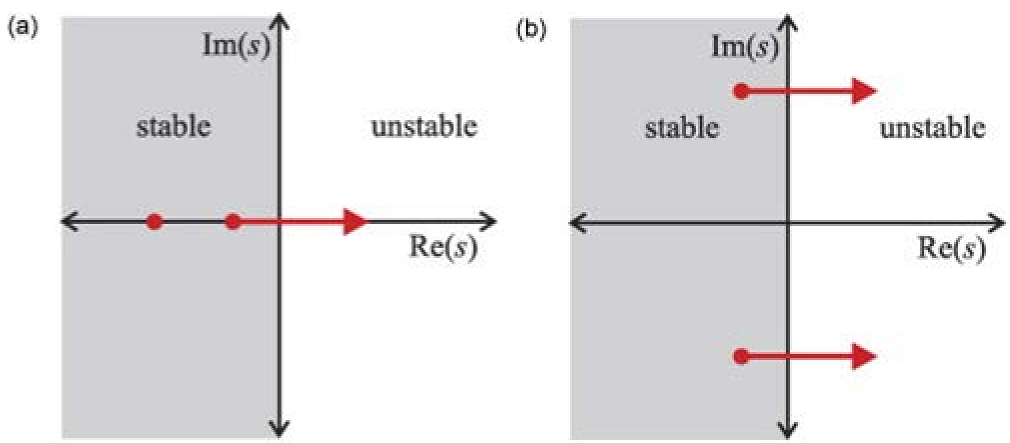
- Slutna systemets överföringsfunktion.

s-planet. $s = \sigma + j\omega$



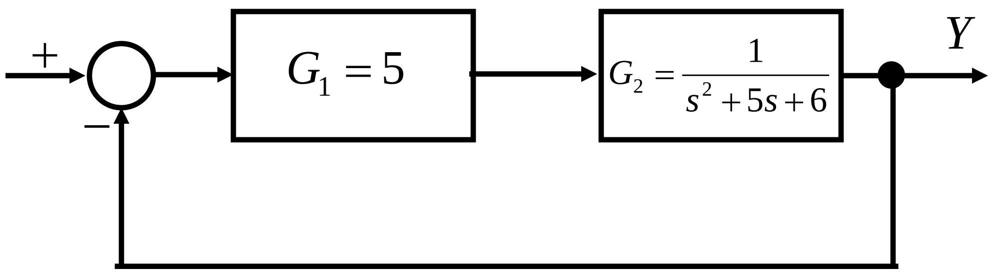
Polbestämning för stabilitet

En överföringsfunktion är stabil om $\boxed{\text{nämnarpolynomet}}$ ***inte*** har rötter som ger poler i högra halvplanet.



Gyllene regeln

Ex. stabilt?



$$G_{TOT} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{s^2+5s+6}}{1 + \frac{5}{s^2+5s+6}} = \frac{5}{s^2+5s+6+5} =$$

$$= \frac{5}{\boxed{s^2+5s+11}}$$

Quadratic Equation Solver

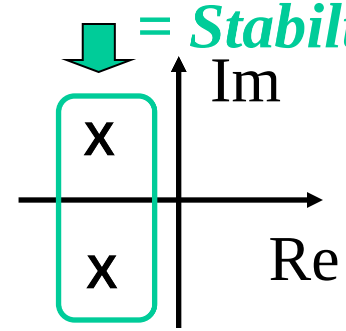
x² + 5x + 11 = 0

Roots:

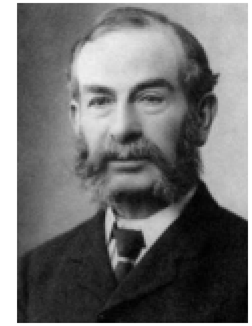
-2.5 + 2.179449472i
-2.5 - 2.179449472i

It has Complex Roots !

= Stabilt!



Routh-Hurwitz metod



Edward Routh

Man kan ta reda på om det finns det någon rot i högra halvplanet eller ej, ***utan*** att man behöver lösa hela nämnarpolynomet!

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1} + 0 + 0$$

Början på Routh-tabellen

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Adolf Hurwitz

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Fortsättningen på Routh-tabellen

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \boxed{0,5} & & \end{array}\right.$$

$$\frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{2} = 0,5$$

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0{,}5 & \boxed{0} & 0 \end{array}$$

$$\frac{2 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{2} = 0$$

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & & \end{array}\right.$$

$$\frac{0{,}5 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{0{,}5} = 1$$

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Fortsätt-
ningen på
Routh-
tabellen

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{0,5 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{0,5} = 0$$

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Routh-tabellen är nu klar.
3+1 rader för gradtal 3.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Alla i första kolumnen har positivt tecken $\Rightarrow$ Stabilt!

Routh-Hurwitz metod

Ett annat nämnarpolynom:

$$s^3 + 2s^2 + s + 9$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ -3{,}5 & & 0 \\ & & 0 \end{array} \qquad \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 9}{2} = -3{,}5$$

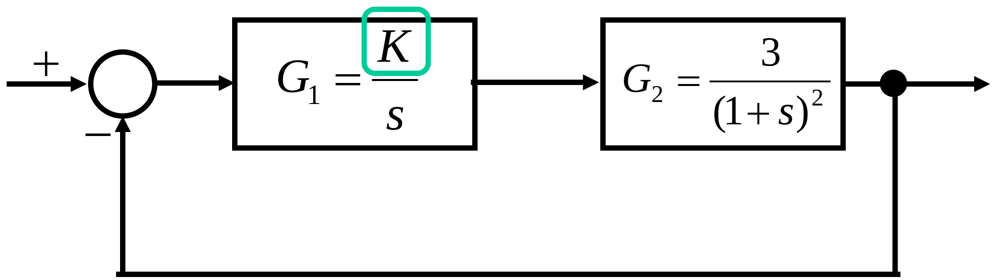
Nu kan man sluta att räkna.

Minst en i första kolumnen är negativ (teckenbyte) $\Rightarrow$ ostabilt!

Routh-Hurwitz metod

Routh's metod kan enkelt ge **algebraiska vilkor** för stabilitet.

– Hur stor förstärkning K kan integratorn maximalt ha?



$$G_{TOT} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2}$$

$$G_{TOT} = \frac{\frac{K}{s} \cdot \frac{3}{(1+s)^2}}{1 + \frac{K}{s} \cdot \frac{3}{(1+s)^2}} = \frac{3K}{s(1+s)^2 + 3K} = \frac{3K}{\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 3K}}$$

William Sandqvist william@kth.se

Routh-Hurwitz metod

$$\boxed{s^3 + 2s^2 + s + 3K}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3K & 0 \\ \frac{2-3K}{2} & 0 & 0 \\ 3K & 0 & 0 \end{array}$$

Vilkor för stabilitet:

$$\Rightarrow \quad 2 - 3K > 0$$

$$\Rightarrow \quad 3K > 0$$

Man får tydligen *inte* vrida upp integratorns förstärkning K över 0,66 !

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 < K < \frac{2}{3}}$$

10.1 Stabilitet

Vilka processer är stabila?

$a)\quad \ddot{y}+\dot{y}-6y=\dot{x}+x$

$b)\quad 2\ddot{y}+6\dot{y}-8y=3\dot{x}$

$c)\quad \ddot{y}+10\dot{y}+21y=\dot{x}+4x$

$d)\quad y'''+3y''-2y'+y=u'+5u$

$e)\quad y'''+7y''+y'+4y=u''+3u$

$f)\quad y'''+3y''+y'+6y=u'+7u$

$g)\quad \dfrac{s+2}{s^2-s-6}$

$h)\quad \dfrac{s^2+3s+2}{s+4}$

e)

10.1 e lösning, Stabilitet

$$y''' + 7y'' + y' + 4y = u'' + 3u \quad \{L:\}$$

$$Ys^3 + 7Ys^2 + Ys + 4Y = Us^2 + 3U \qquad \frac{Y}{U} = \frac{s^2 + 3s}{\boxed{s^3 + 7s^2 + s + 4}}$$

Routh

$$s^3 + 7s^2 + s + 4$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ \frac{3}{7} \\ 4 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 0 \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{array} \end{array}$$

$$\frac{7 \cdot 1 - 1 \cdot 4}{7} = \qquad = \frac{3}{7}$$

MATLAB

```
» pole(tf([1,3,0],[1,7,1,4]))
ans =
  -6.9390
  -0.0305+ 0.7586i
  -0.0305- 0.7586i
```

Inga teckenbyten, stabilt

poler i vhp, stabilt

$f)$ **10.1 f** lösning, Stabilitet

$$y''' + 3y'' + y' + 6y = u' + 7u \quad \{L:\}$$

$$Ys^3 + 3Ys^2 + Ys + 6Y = Us + 7U \qquad \frac{Y}{U} = \frac{s+7}{\boxed{s^3 + 3s^2 + s + 6}}$$

Routh

$$s^3 + 3s^2 + s + 6$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{array}} & \begin{array}{c} 1 \\ 6 \\ 0 \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \end{array} \end{array} \qquad \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 6}{3} = -1$$

teckenbyte, ostabilt

MATLAB

```
» pole(tf([1,7],[1,3,1,6]))
ans =
   -3.2583
   0.1291+ 1.3509i
   0.1291- 1.3509i
```

poler i hhp, ostabilt

10.1 g lösning, Stabilitet

$g)\quad \dfrac{s+2}{\boxed{s^2-s-6}} \qquad s=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+6}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{5}{2}$

poler i hhp, ostabilt

MATLAB

```
» pole(tf([1,2],[1,-1,-6]))
ans =
     3
    -2
```

pol i hhp, ostabilt

10.1 h lösning, Stabilitet

$h)$ $\dfrac{s^2+3s+2}{\boxed{s+4}}$ $s=-4$ pol i vhp, stabilt

MATLAB

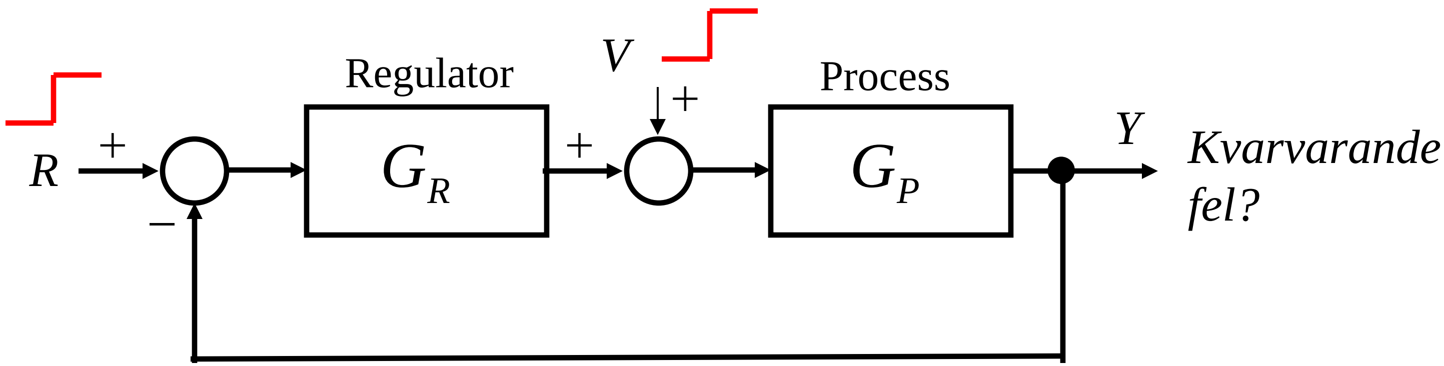
```
» pole(tf([1,3,2],[1,4]))
ans =
    -4
```

pol i vhp, stabilt

Statisk noggrannhet

– När systemet väl är stabilt försöker man också att uppfylla ytterligare **prestandakrav**.

• **Statisk noggrannhet** – litet *kvarvarande* fel.

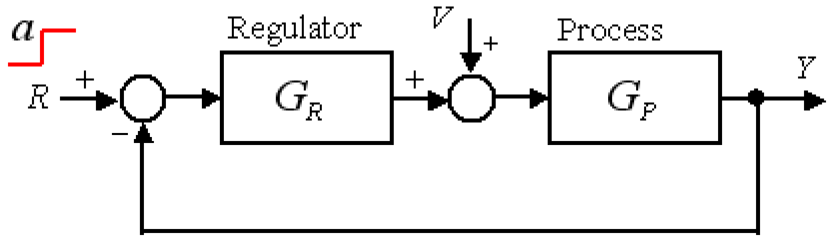


• Börvärdesändringar
• Processtörningar

William Sandqvist william@kth.se

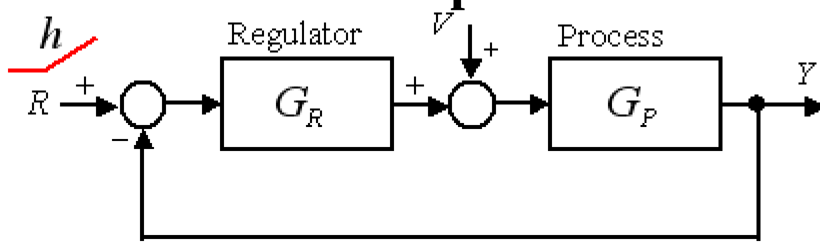
Statisk noggrannhet e_0 e_1 e_V

- Gränsvärde vid **stegformad börvärdesändring**:



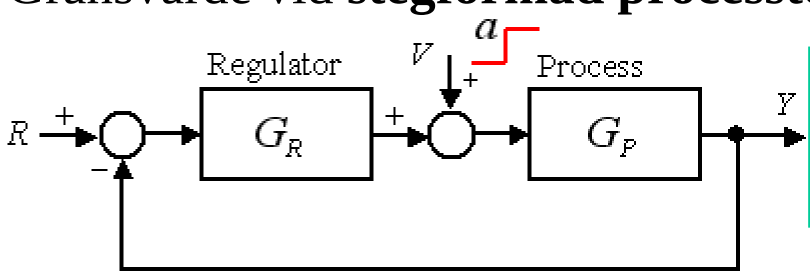
$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

- Gränsvärde vid **rampformad börvärdesändring**:



$$e_l = \lim_{s \to 0} \frac{h}{s \cdot (1 + G_R \cdot G_P)}$$

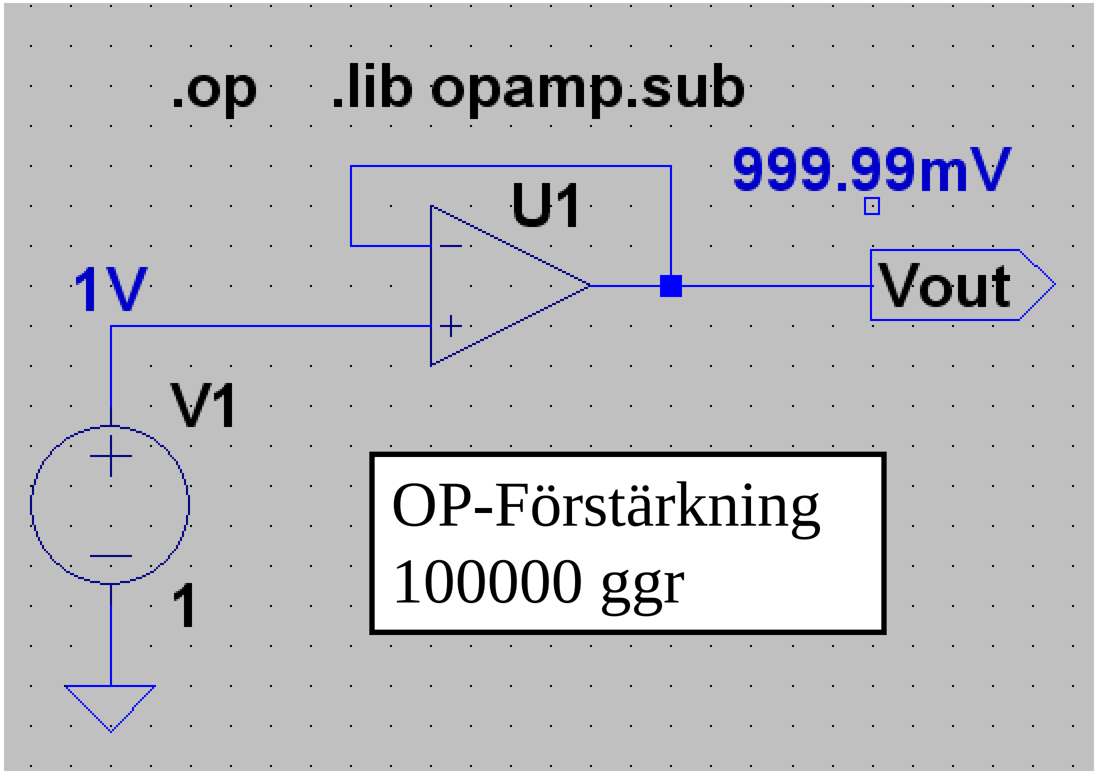
- Gränsvärde vid **stegformad processtörning**:



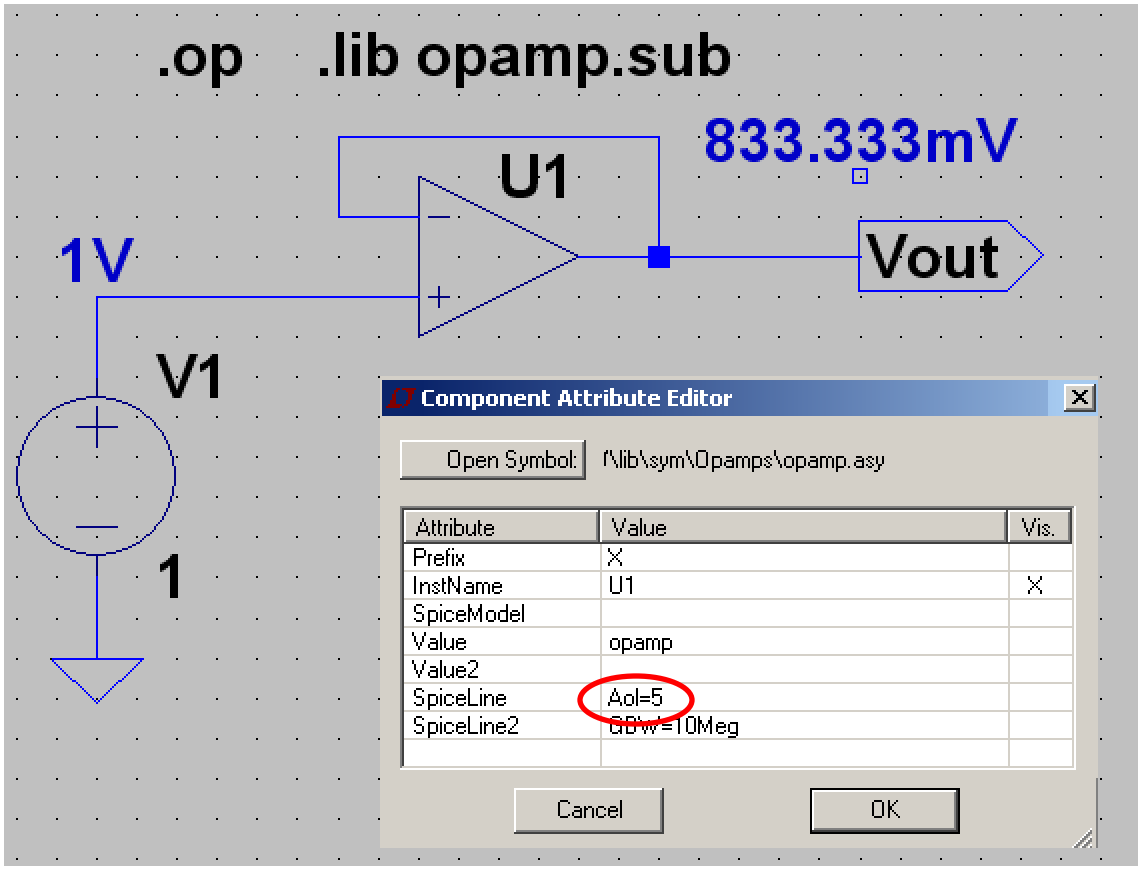
$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

Bevis i appendix.

Kommer Du ihåg OP-följaren?



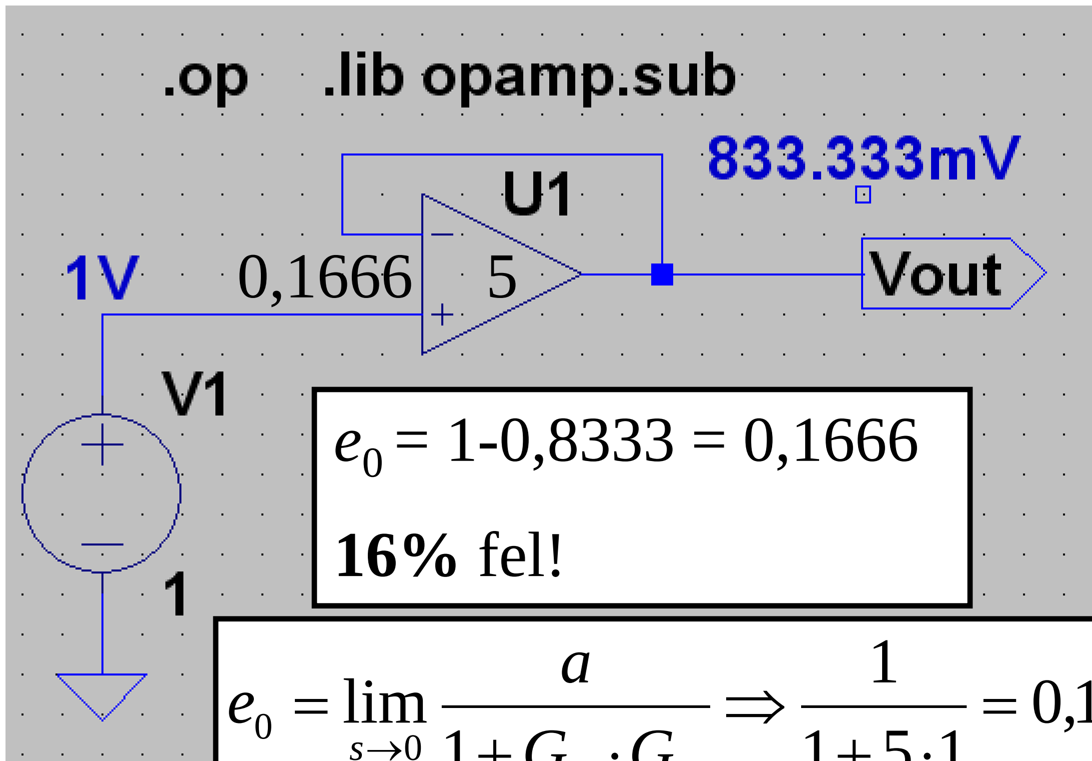
Om OP-förstärkning 5 ggr?



Vi ändrar OP-modellen från Aol=100K till Aol=5.

Nu är förstärkningen bara fem gånger!

Om OP-förstärkning 5 ggr?

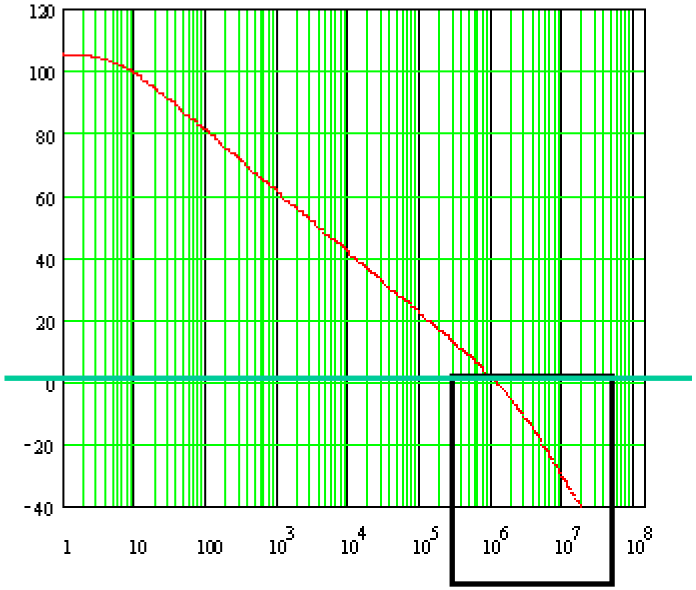


$e_0 = 1\text{-}0{,}8333 = 0{,}1666$

16% fel!

$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{a}{1 + G_R \cdot G_P} \Rightarrow \frac{1}{1 + 5 \cdot 1} = 0{,}1666$$

Operationsförstärkaren



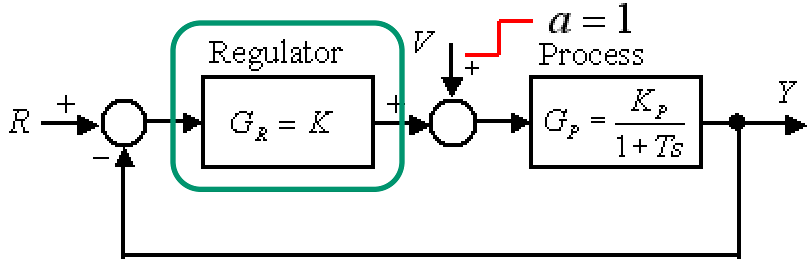
Operationsförstärkarens förstärkningskurva faller en dekad/dekad i Bodediagrammet. Trots att den har 100000 ggr förstärkning kan den därför stabilt motkopplas enda ned till förstärkningen ett.

Frekvenskurvan faller brantare först vid lägre förstärkning än ett (under 0dB). Vid tillverkningen har man lagt till en **kondensator** för att få denna effekt!

- Men till reglerteknikens processer kan man av stabilitetsskäl oftast bara använda ”låga” förstärkningsvärden.

Ex. **utan**/med Integrerande regulator

- **Processtörning**. Proportionell regulator K



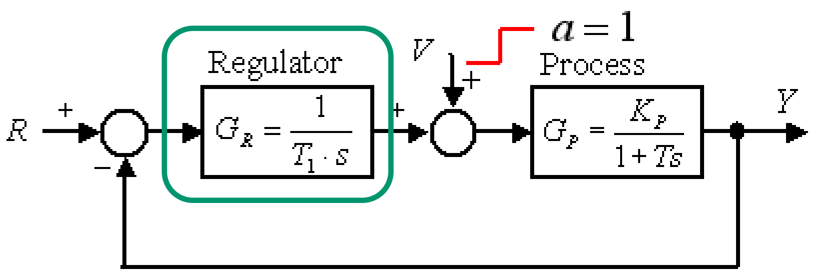
$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

$$e_V = \lim_{s \to 0} \frac{-\frac{K_P}{1+Ts} \cdot 1}{1 + K \cdot \frac{K_P}{1+Ts}} = \lim_{s \to 0} \frac{-K_P}{1+Ts+KK_P} = \frac{-K_P}{1+\boxed{K}K_P}$$

Litet kvarvarande fel e_V kräver **hög regulatorförstärkning** K
– Risk för stabilitetsproblem.

Ex. utan/**med** Integrerande regulator

- **Processtörning**. Integrerande regulator $1/T_1 s$



$$\boxed{e_v = \lim_{s \to 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}}$$

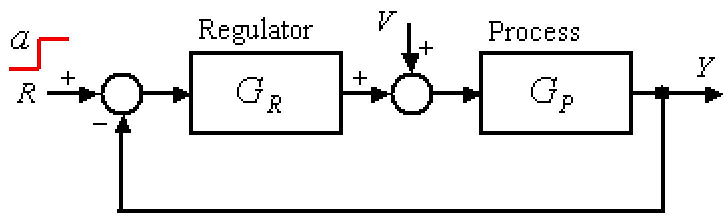
$$e_V = \lim_{s \to 0} \frac{-\dfrac{K_P}{1+Ts} \cdot 1}{1 + \dfrac{1}{T_1 \cdot s} \cdot \dfrac{K_P}{1+Ts}} = \lim_{s \to 0} \frac{-K_P T_1 s}{T_1 s(1+Ts) + K_P} = -\frac{0}{K_P} = \boxed{0}$$

- Inget kvarvarande fel!

För att eliminera kvarstående fel efter en stegformad process-störning *krävs en* ***integrerande*** *regulator.*

Fel vid börvärdesändring

- **Börvärdesändring**. Stegformad börvärdesändring.



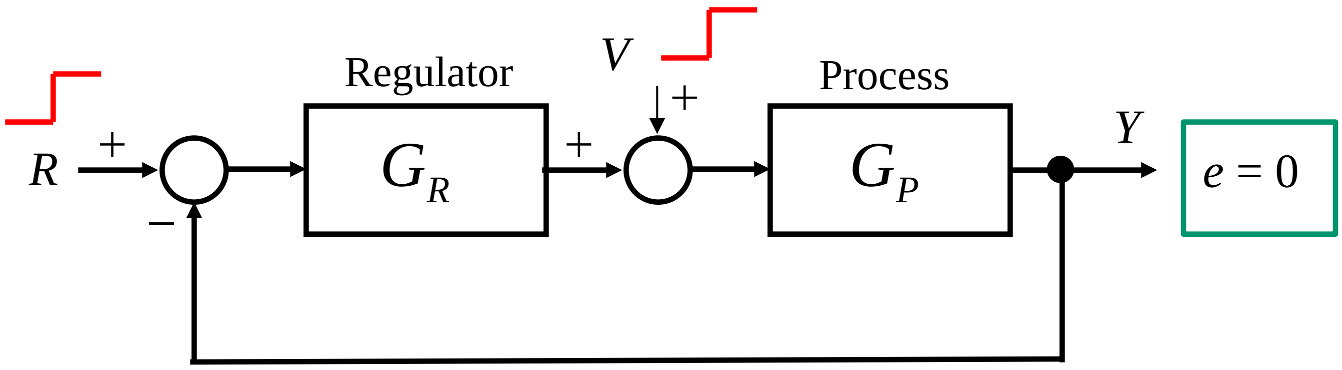
$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

Här har det ingen betydelse *var* integreringen är placerad.

För att eliminera kvarstående fel efter en stegformad börvärdesändring krävs att ***antingen*** regulatorn ***eller*** processen *är* ***integrerande***.

$$e_0 = 0 \quad \text{om } G_R \text{ eller } G_P \text{ integrerande}$$

Sammanfattning e_0 e_V



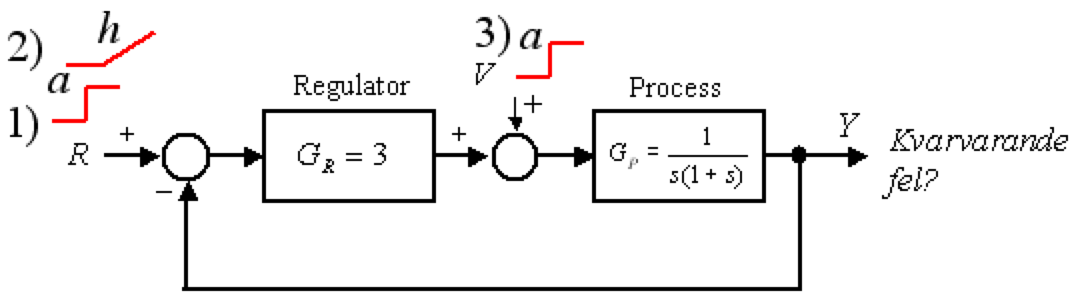
För att eliminera en steg-börvärdesändring R krävs:

- G_R *eller* G_P är integrerande

För att eliminera en steg-störning V krävs:

- G_R är integrerande

Ex. Steg, ramp börvärde/störning



$$G_P = \frac{1}{s(1+s)}$$

integrering

Börvärde:

$$\boxed{e_l = \lim_{s\to 0} \frac{h}{s\cdot(1+G_R\cdot G_P)}}$$

1) $G_P \propto \frac{1}{s} \Rightarrow$ integrering $\quad e_0 = 0$

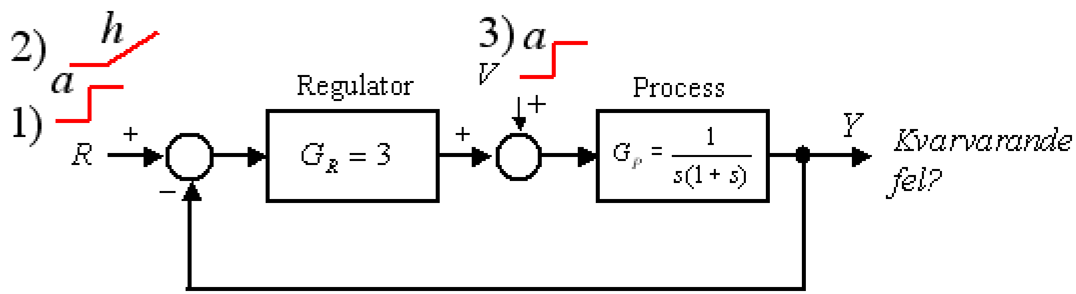
2) ramp $\quad e_1 = \lim_{s\to 0} \frac{h}{s\left(1+\frac{3}{s(1+s)}\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{h}{\frac{s(1+s)+3}{1+s}} = \frac{h}{3}$

Störning:

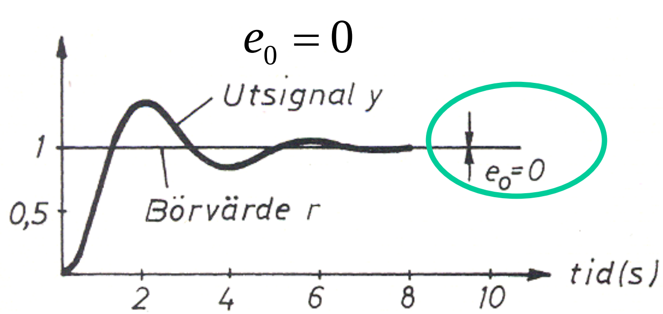
$$\boxed{e_v = \lim_{s\to 0} \frac{-G_P\cdot a}{1+G_R\cdot G_P}}$$

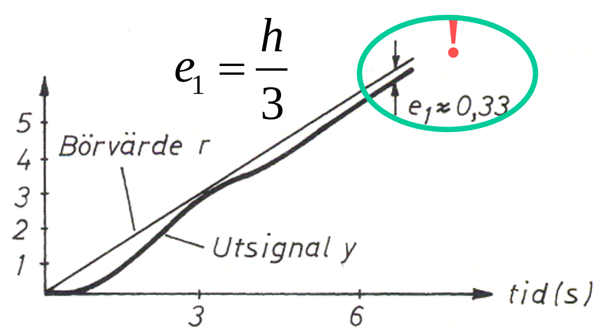
3) steg $\quad e_v = \lim_{s\to 0} \frac{-\frac{3a}{s(1+s)}}{1+\frac{3}{s(1+s)}} = \lim_{s\to 0} \frac{-a}{s(1+s)+3} = -\frac{a}{3}$

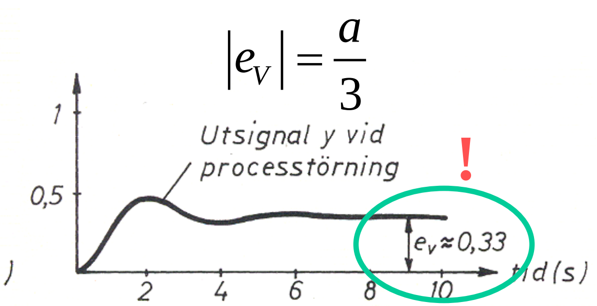
Ex. steg, ramp börvärde/störning



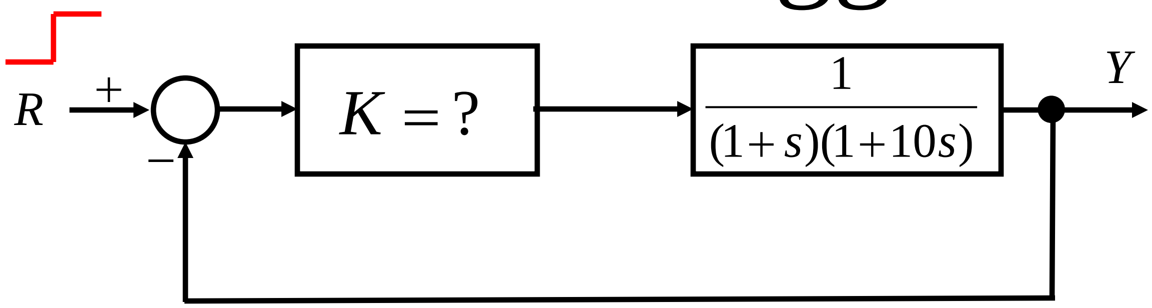
$$1)\quad e_0 = 0 \qquad 2)\quad e_1 = \frac{h}{3} \qquad 3)\quad e_V = -\frac{a}{3}$$







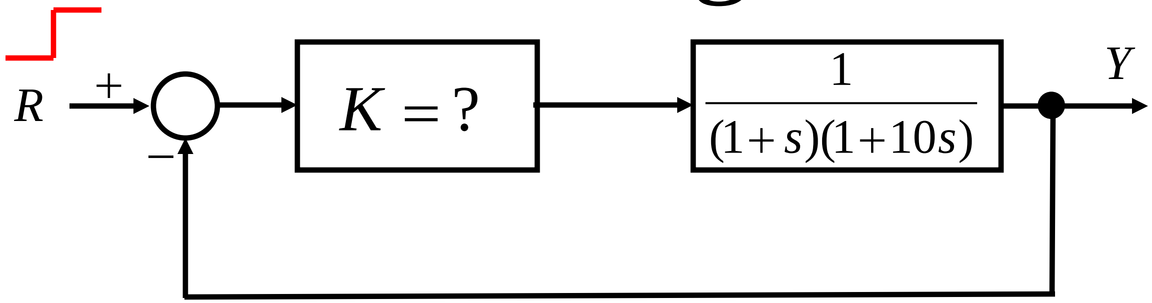
10.14 Statisk noggrannhet



$e_0 = 0{,}1?$

Ställ in regulatorns förstärkning K så att $e_0 = 0{,}1$.

10.14 lösning 10% fel



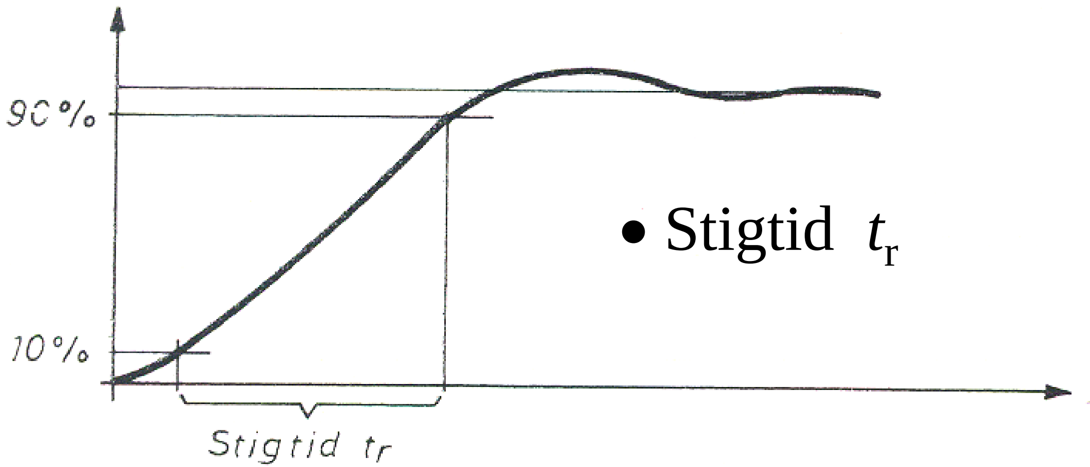
$e_0 = 0{,}1?$

$$\boxed{e_0 = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_R\cdot G_P}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K\cdot\dfrac{1}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{1}{1+\dfrac{K}{1}} = \frac{1}{K+1}$$

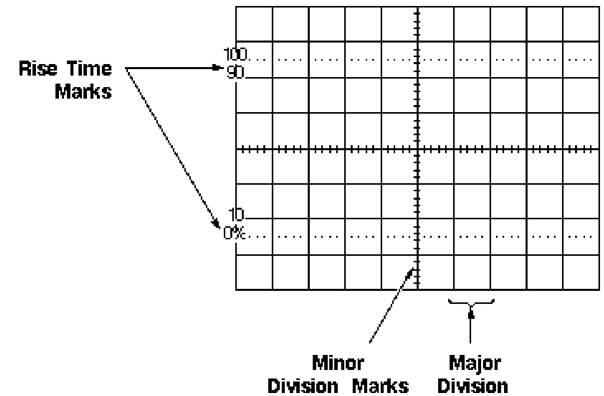
$$\frac{1}{K+1} < 0{,}1 \quad\Rightarrow\quad 1 < 0{,}1 + 0{,}1K \quad\Rightarrow\quad 0{,}1K > 0{,}9 \quad\Rightarrow\quad \boxed{K > 9}$$

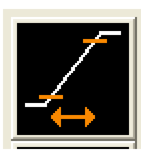
Snabbhet

Stigtidsmarkeringar på oscilloskopskärm



• Stigtid t_r





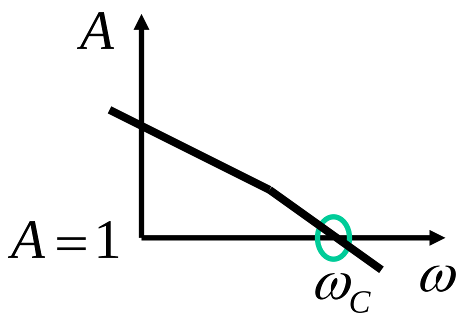
Stigtiden kan *enkelt* mätas med oscilloskop, de har ofta någon ”inbyggd mätfunktion” för detta.

För överföringsfunktioner som har höga gradtal är det dock besvärligt att beräkna vilket exakt värde stigtiden bör ha. Därför använder man **tumregler** när man värderar stigtidsmätningar.

Snabbhet,   tumregel

Kretsöverföringen, den öppna överföringsfunktionen, har överkorsningsfrekvensen ω_C i Bodediagammet.
(Skärningen med $A(\omega) = 1$)

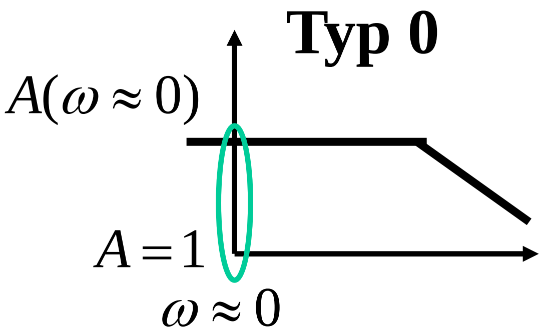
För ofta förekommande, ”normala”, överföringsfunktioner använder man följande ***aproximativa tumregel***:

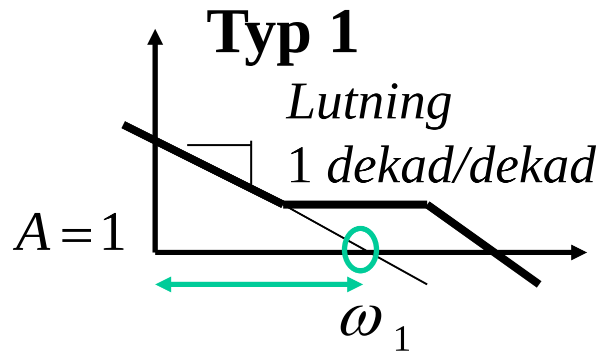


$$\boxed{t_r \approx \frac{1,4}{\omega_C}}$$

Avläsning av felen $e_0 \; e_1$ ur Bodediagrammet

Ur kretsöverföringen (öppna systemet)





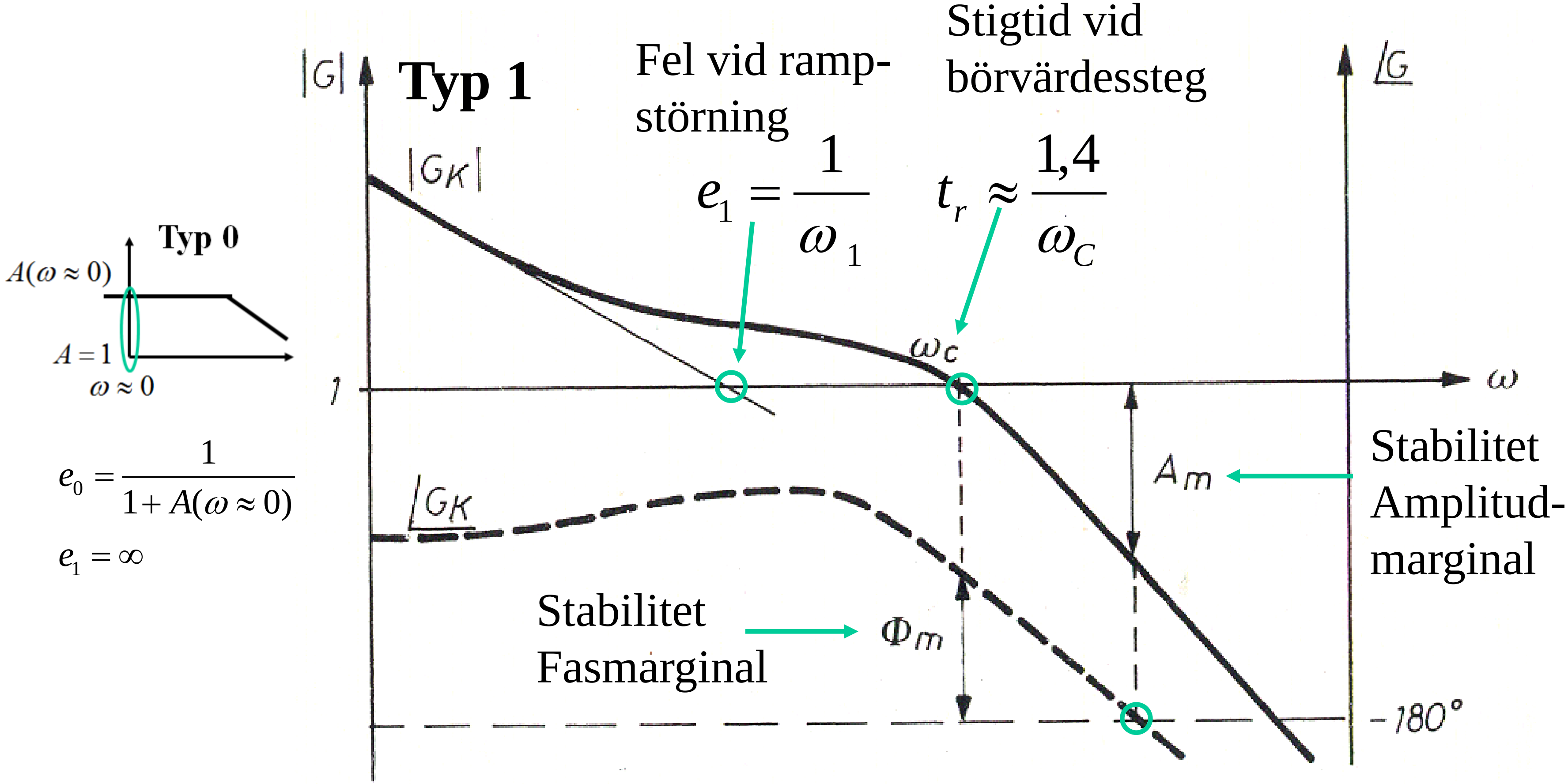
$$\Rightarrow e_0 = \frac{1}{1 + A(\omega \approx 0)}$$

$$\Rightarrow e_0 = 0$$

$$\Rightarrow e_1 = \infty$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\omega_1}$$

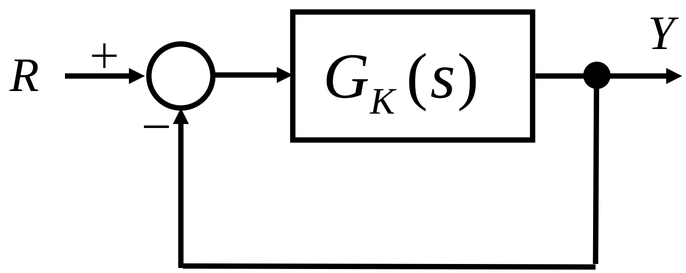
Sammanfattning av Bodediagrammet

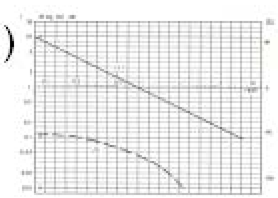
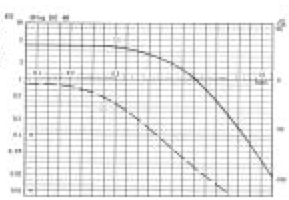
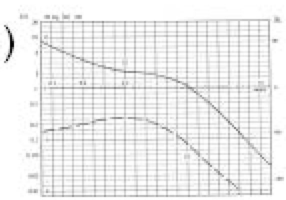
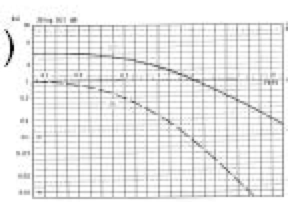


William Sandqvist william@kth.se

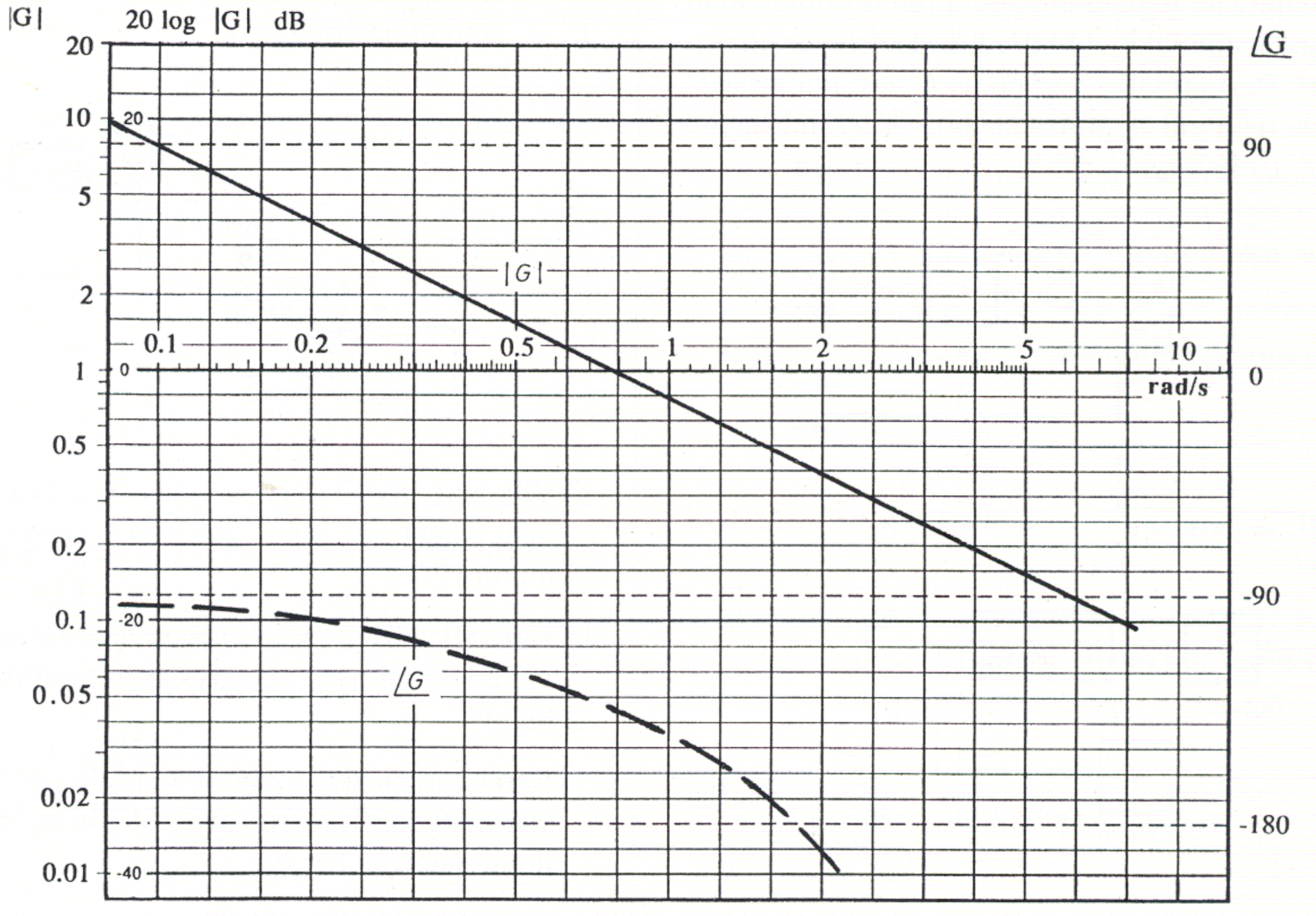
10.17 Bodediagram

$$A_m = ? \quad \Phi_m = ? \quad t_r = ? \quad e_0 = ? \quad e_1 = ?$$

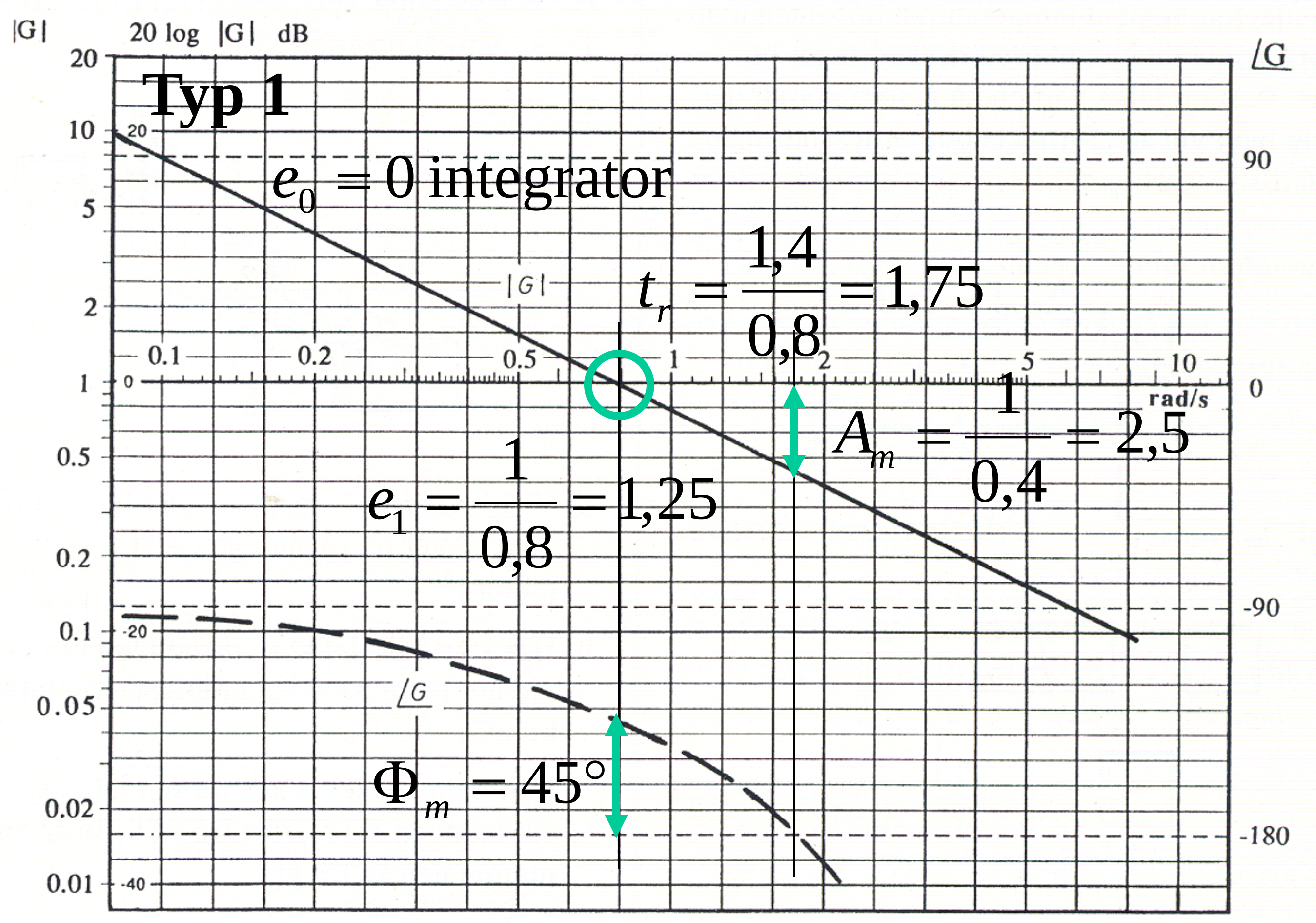


a)

b)

c)

d)


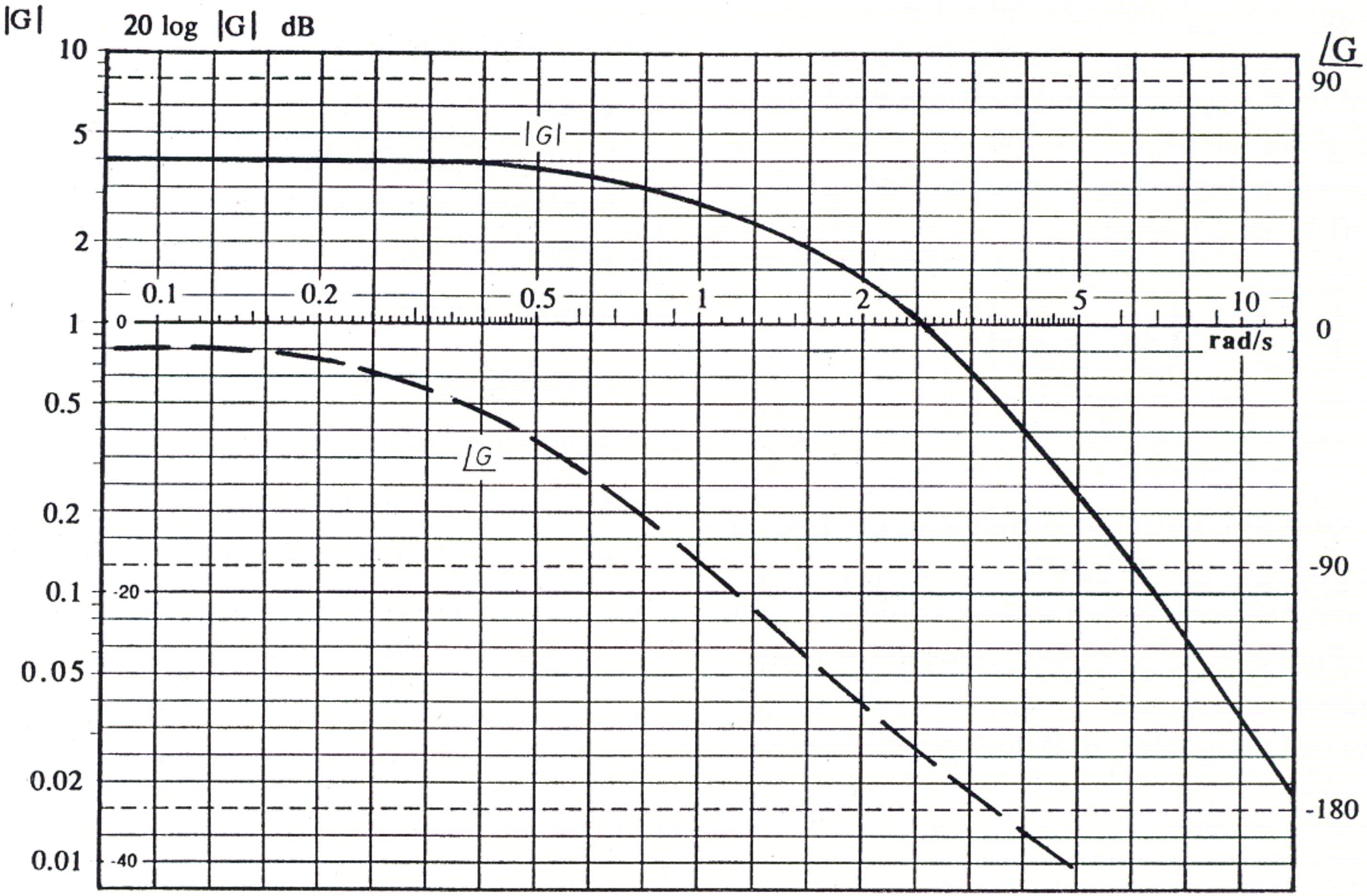
10.17 a Bodediagram



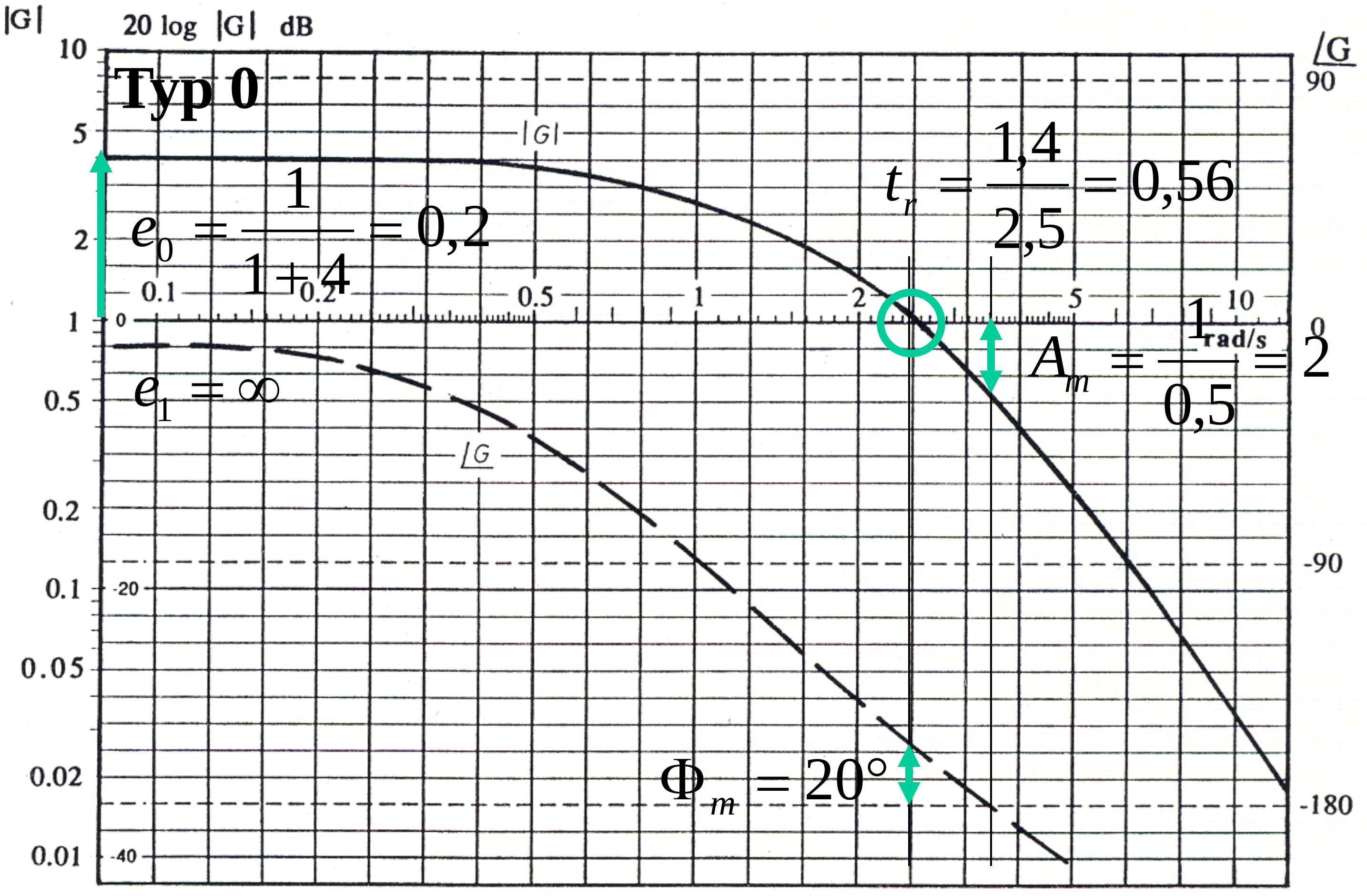
10.17 a lösn Bodediagram



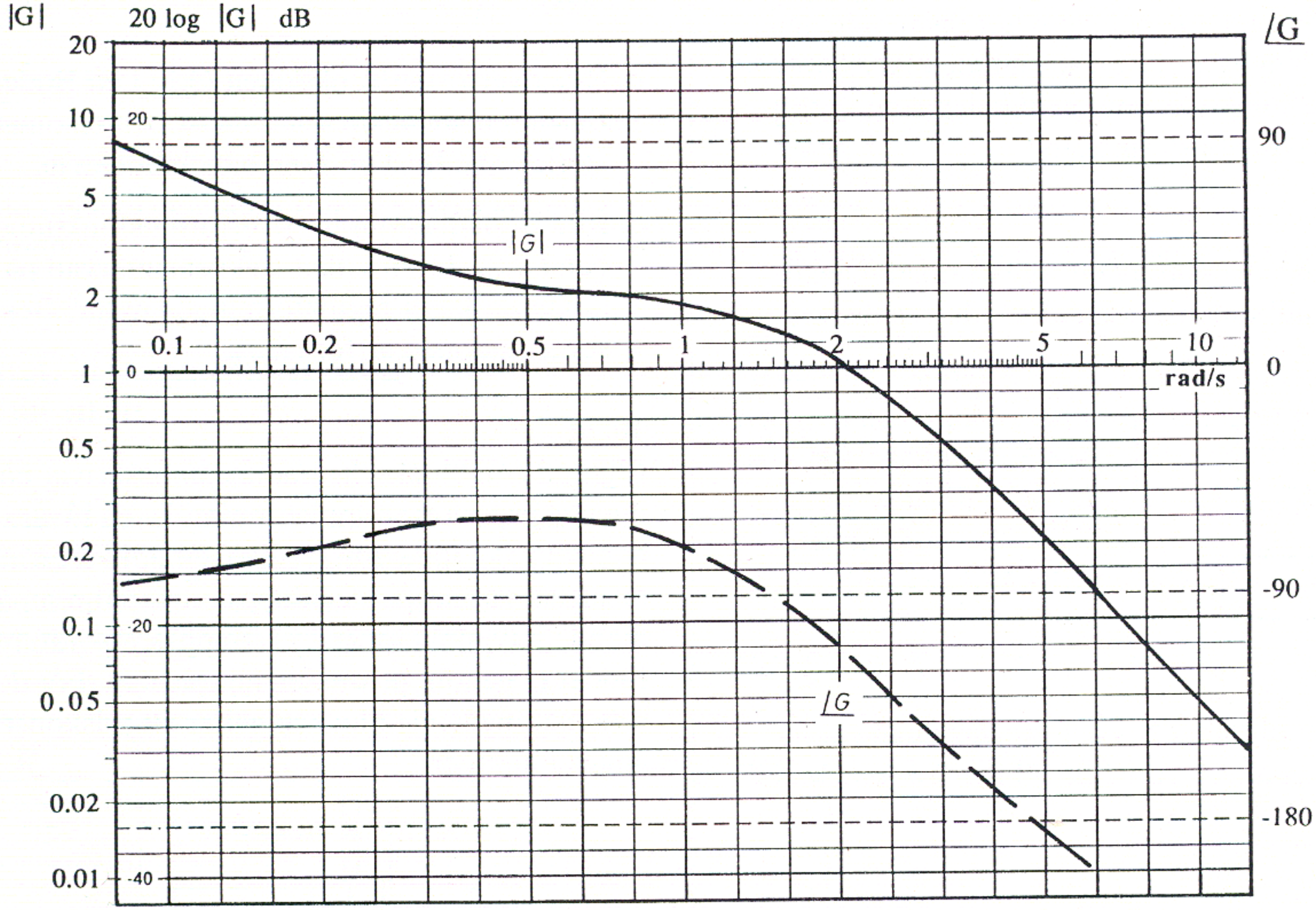
10.17 b Bodediagram



10.17 b lösn Bodediagram

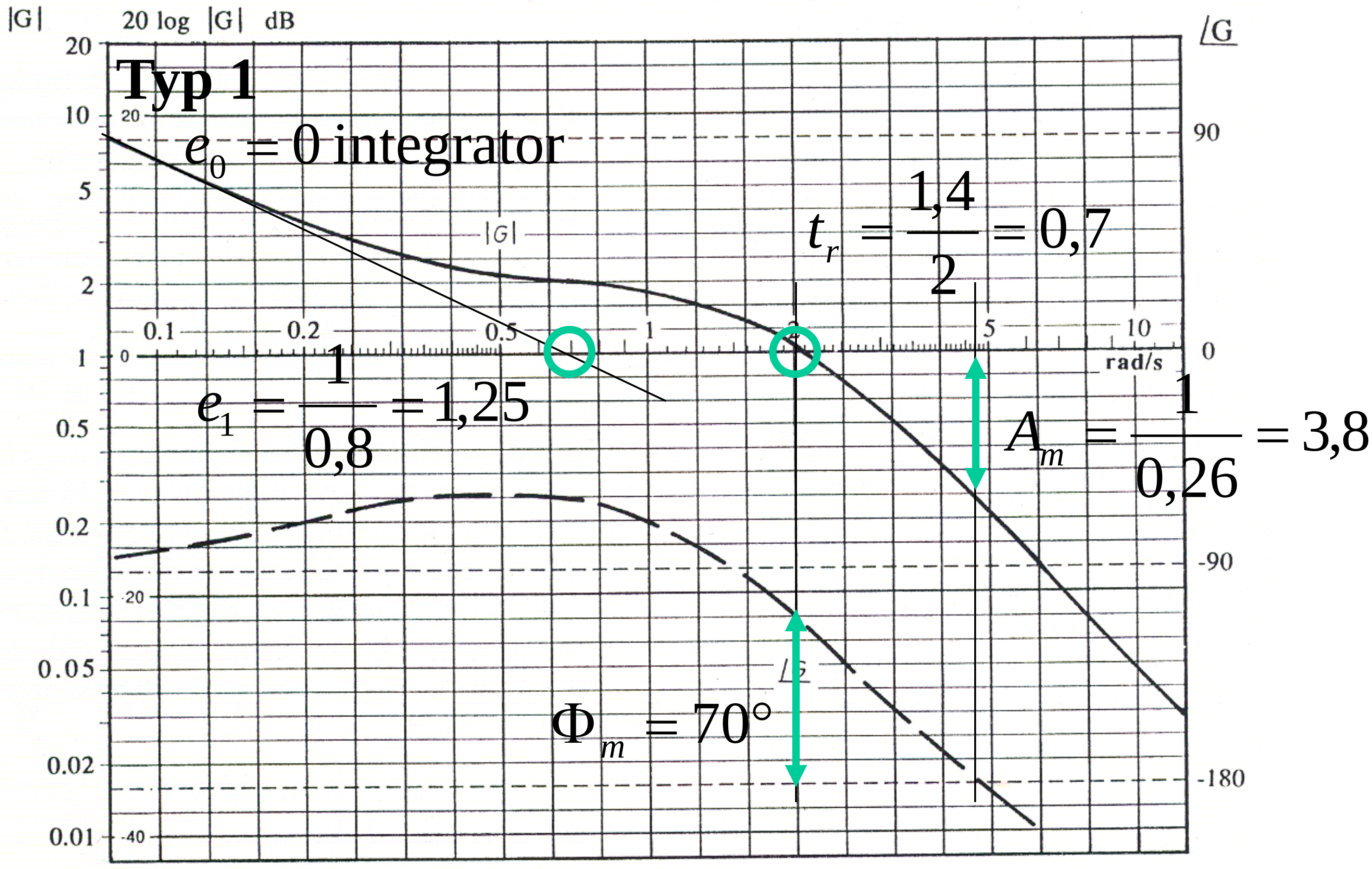


10.17 c Bodediagram

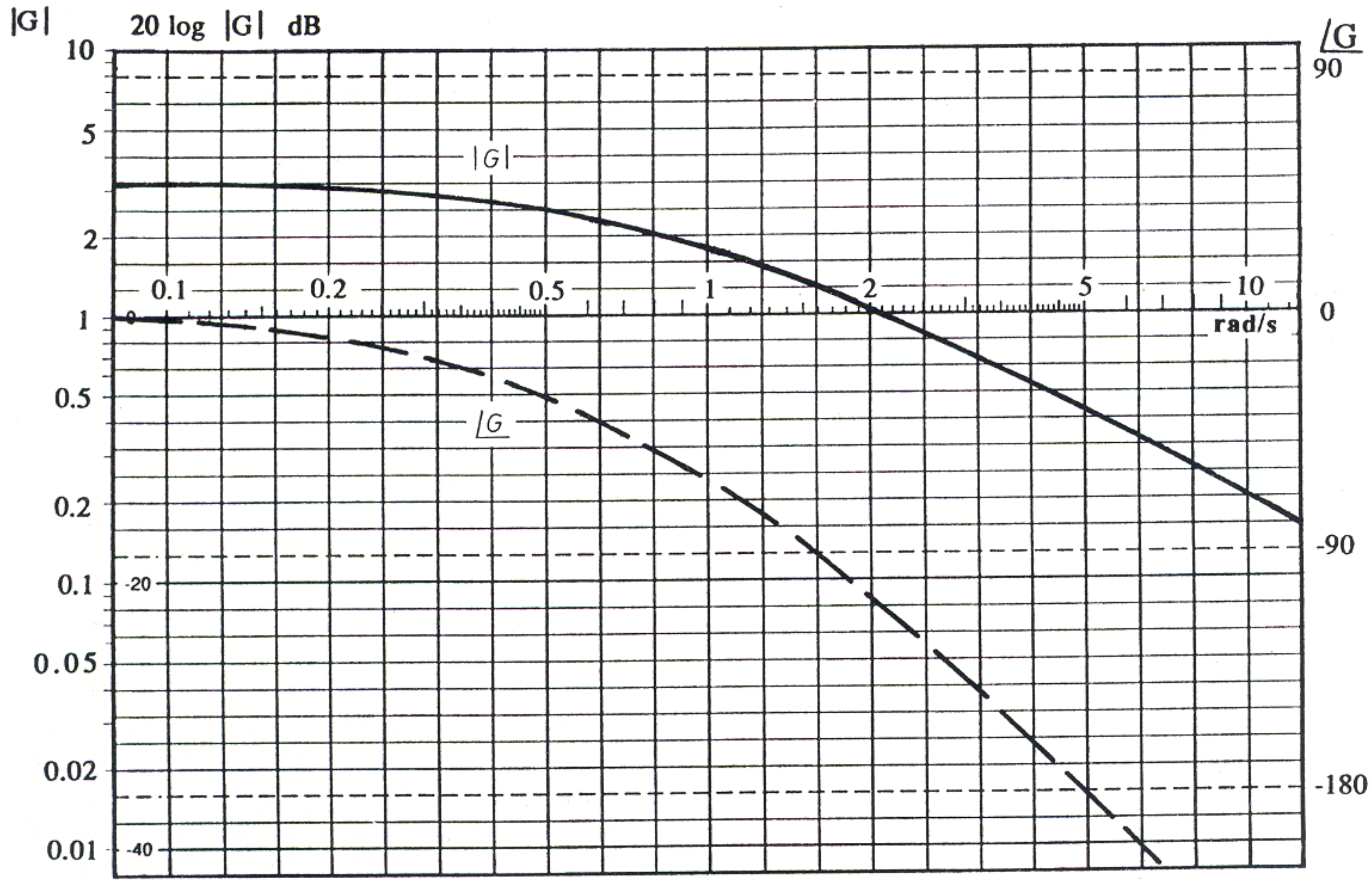


William Sandqvist william@kth.se

10.17 c lösn Bodediagram

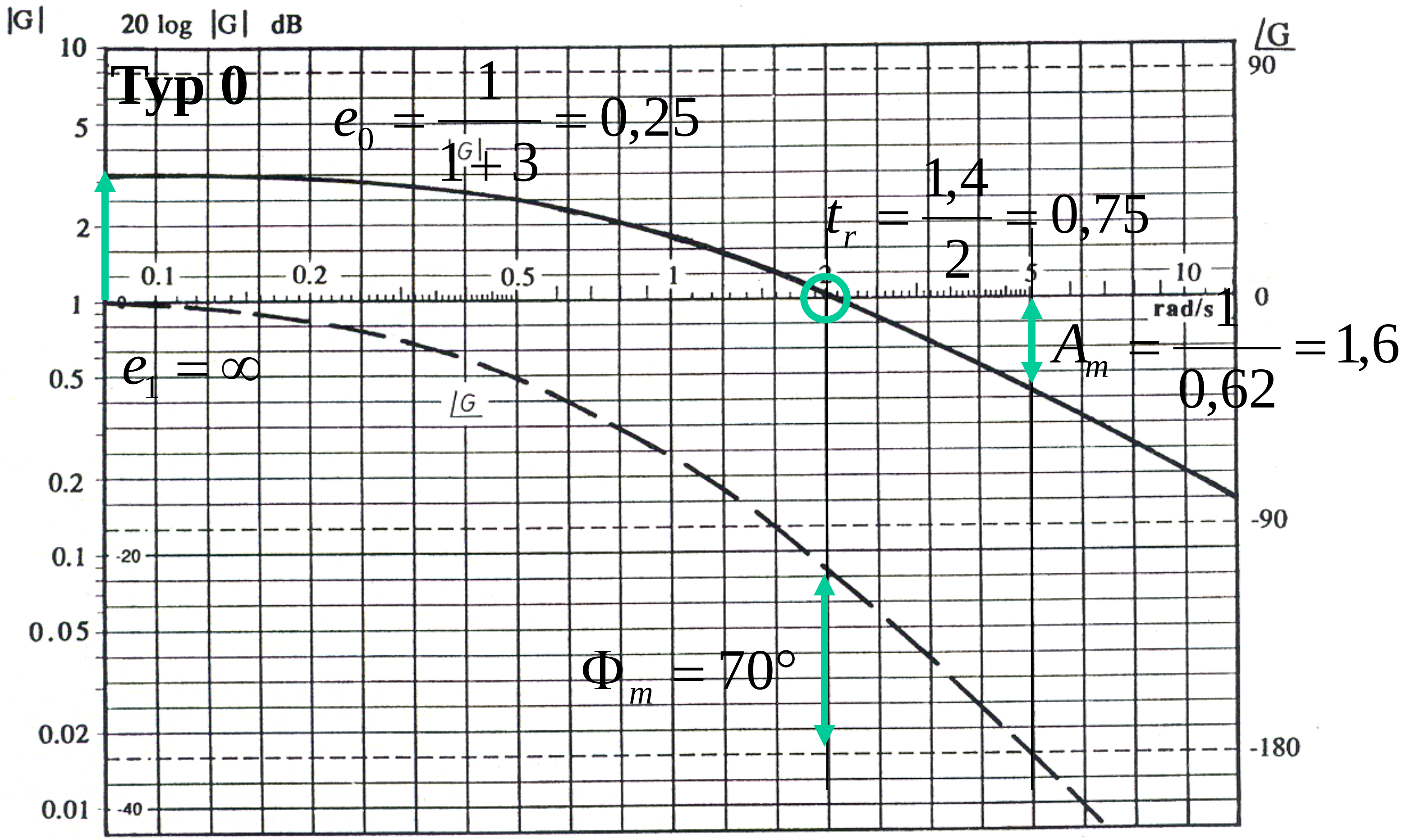


10.17 d Bodediagram

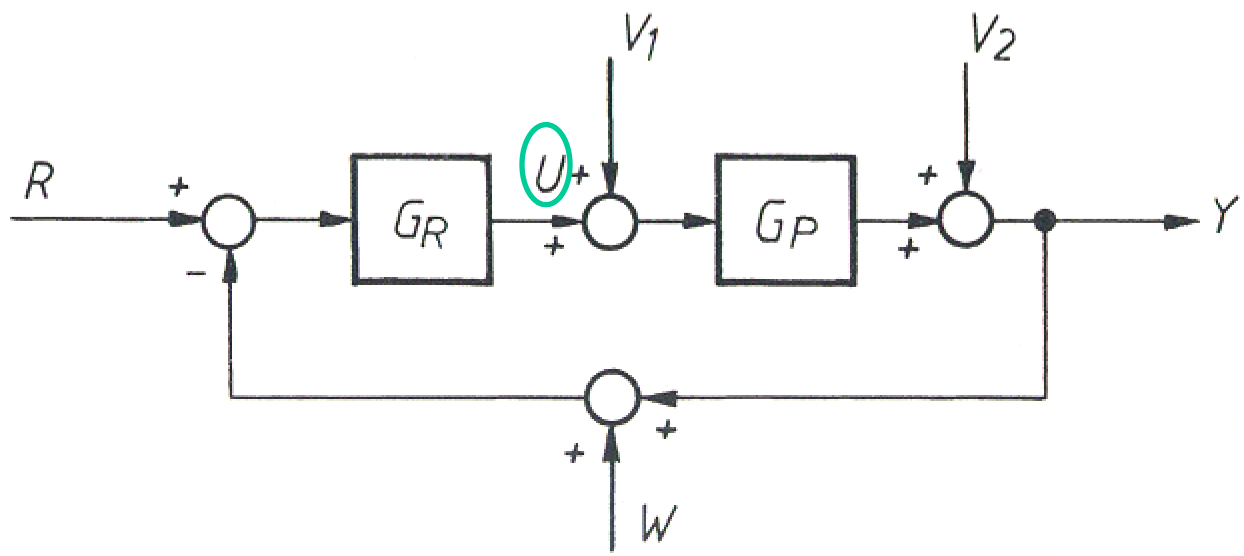


William Sandqvist william@kth.se

10.17 d lösn Bodediagram

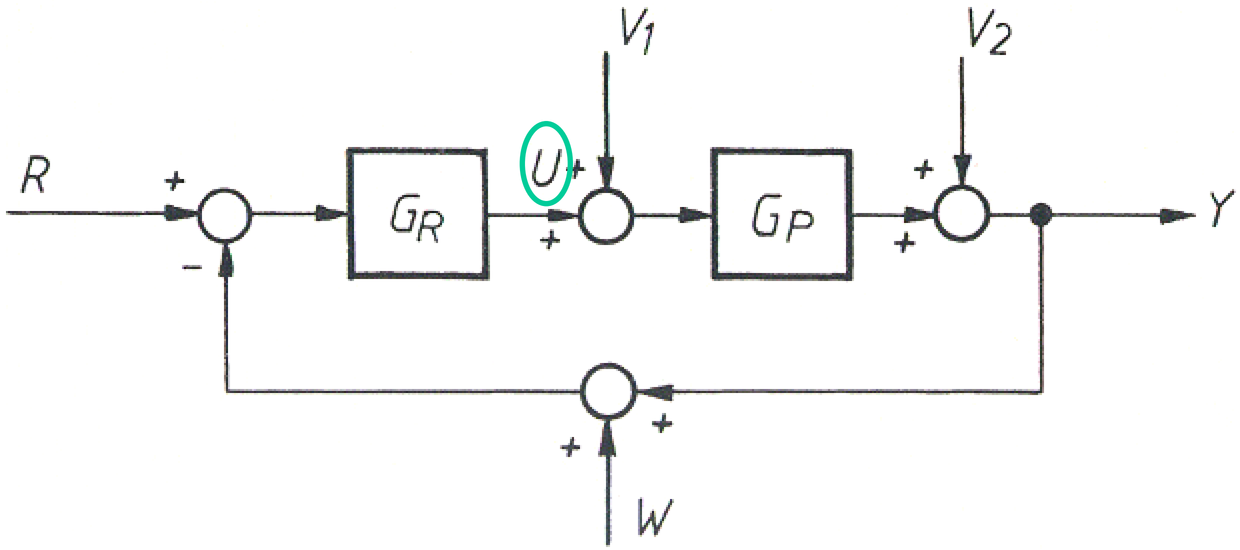


Styrsignalstorlek?



Hur stor blir styrsignalen *U* ? Det är ingen mening med en matematiskt perfekt regulator som genererar **orimliga styrsignaler** under regleringen!

Styrsignalöverföringsfunktioner



$$\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1+G_P G_R} \qquad \frac{U}{W} = \frac{-G_R}{1+G_P G_R}$$

$$\frac{U}{V_1} = \frac{-G_R G_P}{1+G_P G_R} \qquad \frac{U}{V_2} = \frac{-G_R}{1+G_P G_R}$$

Styrsignalaktiviteten kan **simuleras**, eller studeras med Bodediagram.

Styrsignalöverföringsfunktioner

För **höga frekvenser** är det vanligt att $\boxed{G_P \rightarrow 0}$.
Styr-signalerna beror då *mest* på regulatorns högfrekvens-egenskaper:

$$\frac{U}{R} = \frac{G_R}{1+G_P G_R} \qquad \frac{U}{W} = \frac{-G_R}{1+G_P G_R}$$

$$\frac{U}{V_2} = \frac{-G_R}{1+G_P G_R}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| \frac{G_R}{1+\underbrace{G_P G_R}_{\approx 0}} \right| = \boxed{\lim_{\omega \to \infty} \left| G_R \right|}$$