# Reglerteknik 2

Kapitel 5, 6



Köp bok och övningshäfte på kårbokhandeln

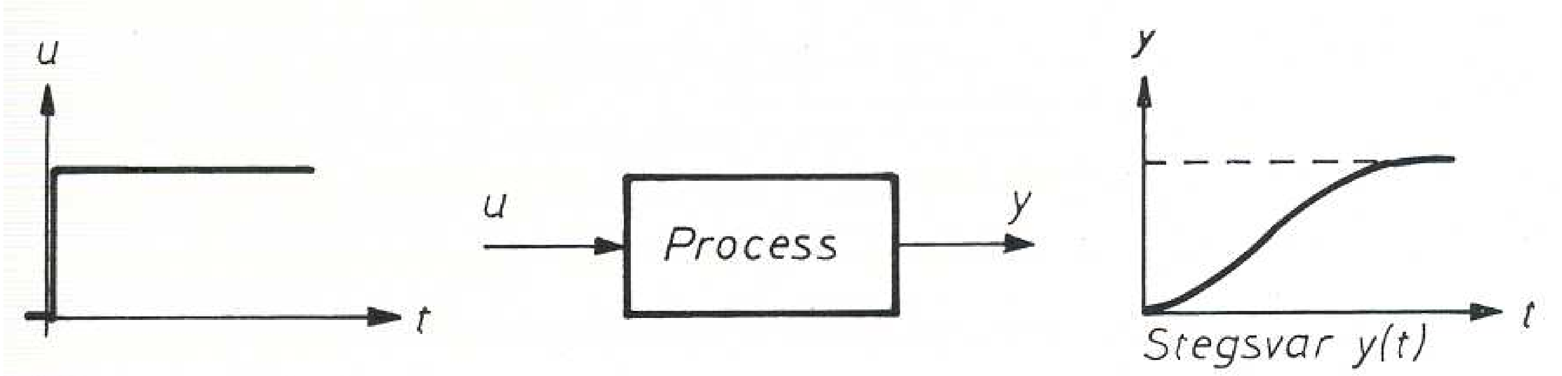
William Sandqvist william@kth.se

# Lektion 2 kap 5, 6

- Differentialekvationer
- Laplace-transformer
- Dynamik hos vanliga processer

William Sandqvist william@kth.se

# Stegsvar




Enhetssteget är den vanligaste ”testsignalen”.

***Kommer Du ihåg …***

# (Första ordningens differentialekvationer)

Stegsvar för ($u$ = insignal, $y$ = utsignal):

*differentialekvation* *enhetssteg* *begynnelsevärde*

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu \qquad \boxed{u(t) = 1 \quad t > 0} \; \boxed{y(0) = 0}$$

$y = y_T + y_S$ Vi söker summan av en transient och en stationär lösning

$$y_T : \quad \frac{d}{dt} y + ay = 0 \;\Rightarrow\; y_T(t) = \boxed{C \cdot e^{-at}}$$

- *Transient lösning*

Kontrollera (genom insättning):

$$\frac{d}{dt} C \cdot e^{-at} + a \cdot C \cdot e^{-at} = -a \cdot C \cdot e^{-at} + a \cdot C \cdot e^{-at} = 0$$

# (Första ordningens differentialekvationer)

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \quad \Rightarrow \quad y(t) = C \cdot e^{-at} + y_S$$

• *Total lösning* $y_T + y_S$
( $y_S$ *är en konstant* )

Insättning:

$$0 + a \cdot y_S = b \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_S = \frac{b}{a}}$$

• *Stationär lösning*

• *sätt in begynnelsevärde*

$$y(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{b}{a} \quad \{\ y(0) = 0\ \} \quad 0 = C \cdot 1 + \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = -\frac{b}{a}}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})}$$

# (Ex. Första ordn. Differentialekvation)

Stegsvar för ($u$ = insignal, $y$ = utsignal): $\boxed{\dot{y} + 5y = 28u}$

Begynnelsevärde $y(0) = 0$. Enhetssteg $u(t) = 1$ för $t > 0$.

$$\dot{y} + 5y = 28 \qquad y = y_T + y_S$$

$$y_T: \quad \dot{y} + 5y = 0 \;\Rightarrow\; y_T(t) = C \cdot e^{-5t}$$

• *Transient lösning*

$$y_S: \quad y_S = \frac{28}{5}$$

• *Stationär lösning*

$$y(t) = C \cdot e^{-5t} + \frac{28}{5} \quad \{\, y(0) = 0 \,\} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{28}{5}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{28}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)}$$

William Sandqvist william@kth.se

# (Första ordningens differentialekvationer snabbformler)

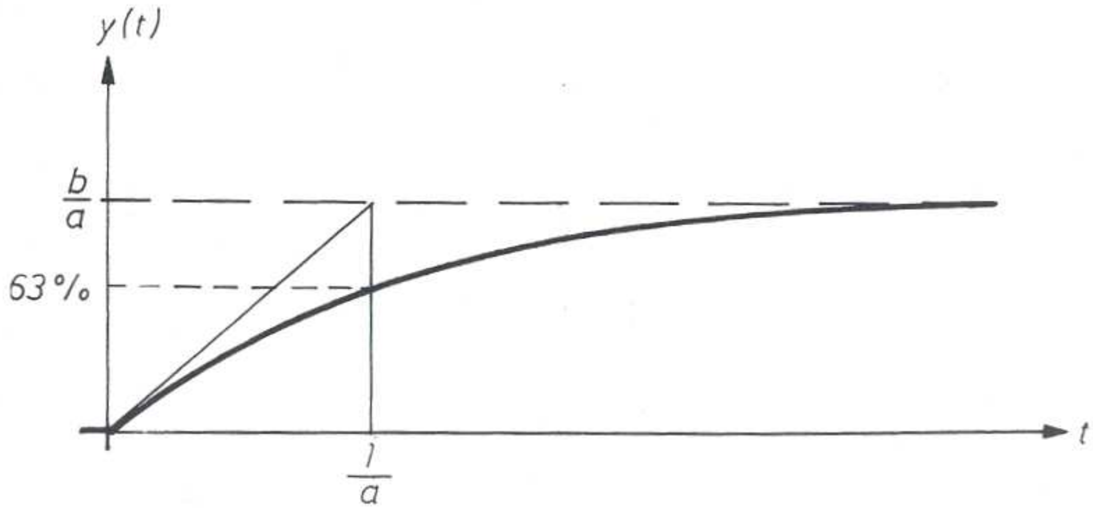
*differentialekvation* *enhetssteg* *begynnelsevärde*

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu \qquad \boxed{u(t) = 1 \quad t > 0} \qquad \boxed{y(0) = 0}$$

Du kan redan snabb-formlerna:

$$\boxed{x(t) = x_{\infty} - (x_{\infty} - x_0)e^{-\frac{t}{T}}}$$

$$\boxed{t = T \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}}}$$



***Kommer Du ihåg …***

# (Andra ordningens differentialekvationer)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = bu \quad u(t) = 1 \;\; t > 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

- *Transient lösning – karakteristisk ekvation*

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = 0 \quad \{ KE \} \quad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

1) Rötterna $k_1$ och $k_2$ reella och olika $\quad y_T = A\cdot e^{k_1 t} + B\cdot e^{k_2 t}$

2) Rötterna $k_1$ och $k_2$ reella och lika = $k$ $\quad y_T = A\cdot e^{kt}(A + B\cdot t)$

3) Rötterna $k_1$ och $k_2$ komplexkonjugerade

$$k_1 = a + jd \quad k_2 = a - jd \qquad y_T = e^{at}(A\cdot\cos dt + B\sin dt)$$

- *Stationär lösning* $\quad y_S = \dfrac{b}{a_2}$

# (Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = b \cdot u \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad u = 1 \;\; t > 0$$

- *Transient lösning*

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0 \quad \{\, KE \,\} \quad k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$k = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow$$

$$k_1 = -2 \quad k_2 = -3$$

$p$, $q$-formeln

$$y_T = A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{-3t}$$

- *Stationär lösning* $\qquad y_S = \dfrac{1}{6}$

# (Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

- *Total lösning* $y_T + y_S$

$$y(t) = \frac{1}{6} + A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{-3t}$$

Insättning av begynnelsevärden:

$$y(0) = \frac{1}{6} + A + B = 0$$

$$\dot{y}(t) = -2A \cdot e^{-2t} - 3B \cdot e^{-3t} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\dot{y}(0) = -2a - 3B = 0$$

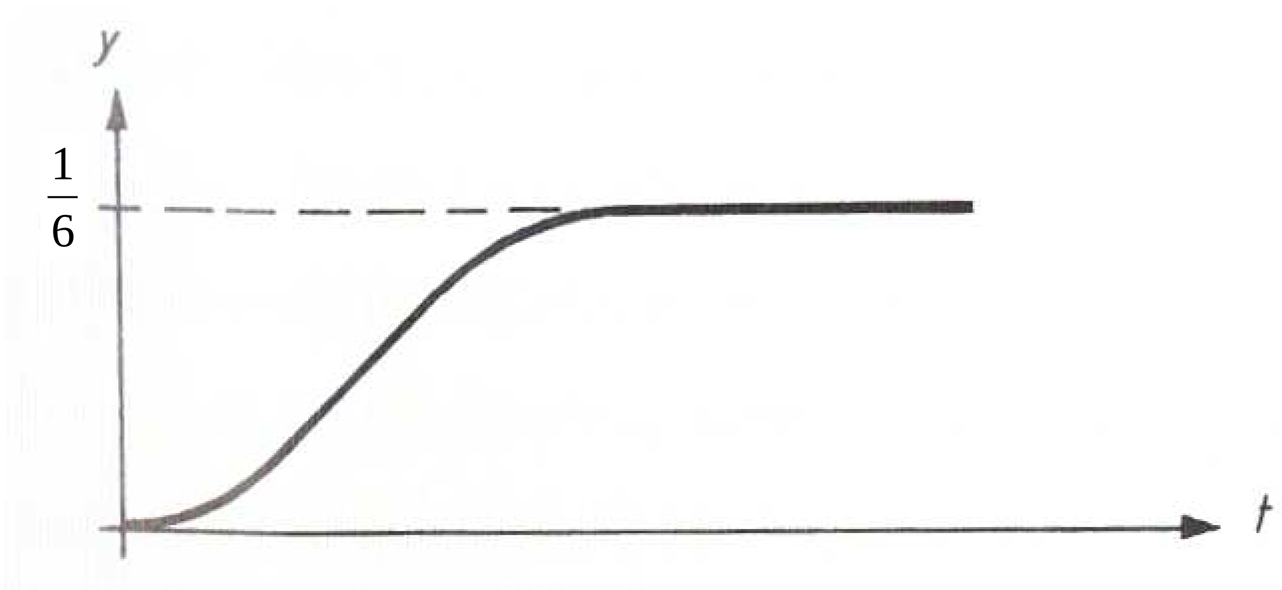
$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}$$

Det blev ett stegsvar med två tidkonstanter.

# (Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}$$

Det blev ett stegsvar med två tidkonstanter.




William Sandqvist william@kth.se

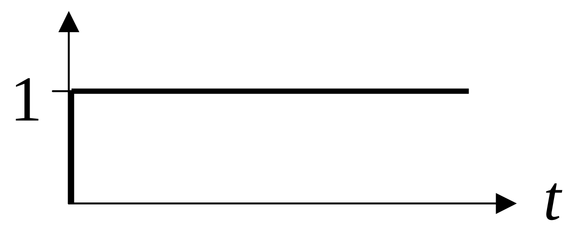

William Sandqvist william@kth.se

# Laplacetransformen

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Stegfunktion  (Heaviside step function)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$




$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\infty = 0 - \left( -\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

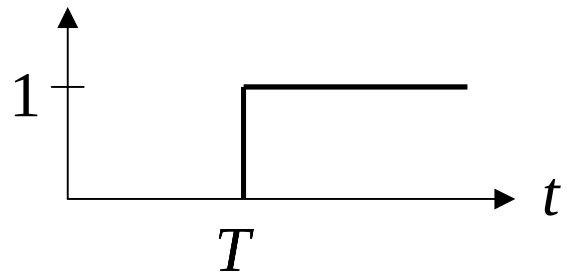
William Sandqvist  william@kth.se

# Laplacetransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Fördröjd stegfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases}$$




Delay $T$

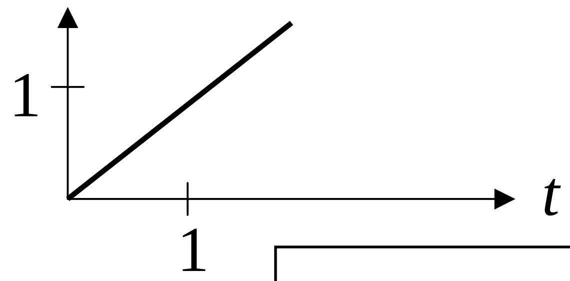
$$F(s) = \int_{0,T}^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_T^\infty = 0 - \left( -\frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s} \cdot e^{-sT}$$

# Laplacetransformer

$$\boxed{F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt \qquad f(t), \quad t > 0}$$

Ex. Rampfunktion

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$




$$F(s) = \int_0^{\infty} t\cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\cdot t\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s}dt =$$

$$= -\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

Partiell integrering:

$$\int f'\cdot g\,dt =$$

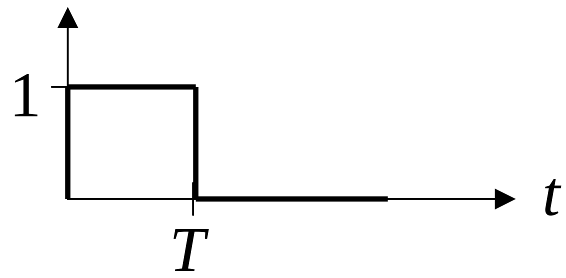
$$= f\cdot g - \int f\cdot g'$$

William Sandqvist william@kth.se

# Laplacetransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt \qquad f(t), \quad t>0$$

Ex. Rektangelpuls



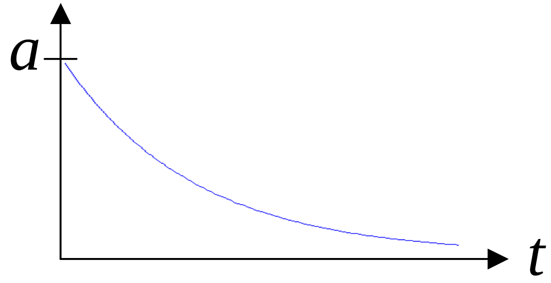

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\cdot t\right]_0^T = -\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1-e^{-sT})$$

# Laplacetransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Exponentialfunktion

$e^{-at} \quad a > 0$



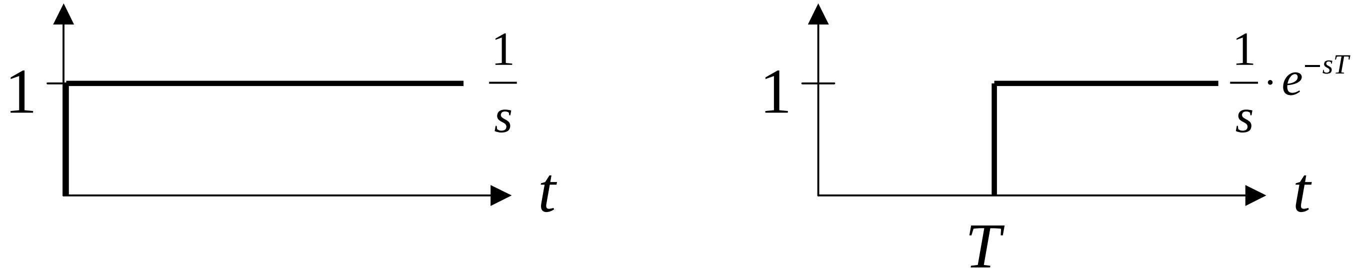

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt = \left[ -\frac{-e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^\infty = \frac{1}{a+s}$$

# Superpositionsregeln

$$L[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$$

Det var ju enkelt och bra …

# Fördröjningssatsen




$$L[f(t-T)] = F(s)\cdot e^{-Ts}$$

**Fördröjningssatsen**. En tidsfördröjd signal får exponentiellt dämpad Laplacetransform.
**Dämpningssatsen**. En exponentiellt dämpad signal får en förskjuten Laplacetransform.

$$L[f(t)\cdot e^{-at}] = F(s+a)$$

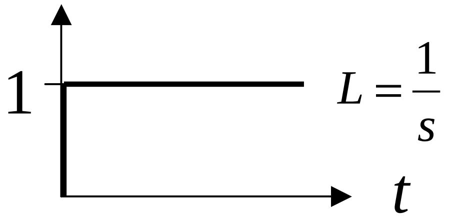
# Derivata/integral

$$L[f'(t)] = \boxed{s} \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \boxed{\frac{1}{s}} \cdot F(s)$$

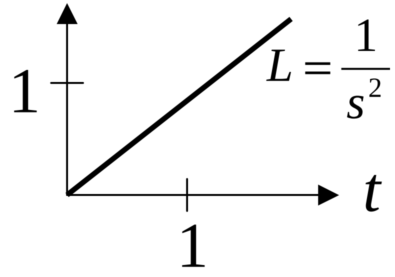
Deriveringssatsen och integreringssatsen är grunden för Laplacetransformens användbarhet vid lösandet av differentialekvationer.

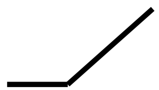
# Ex. Derivata/**integral**




**Rampen** är ett tidsintegrerat **Språng**

- Integrering $1/s$

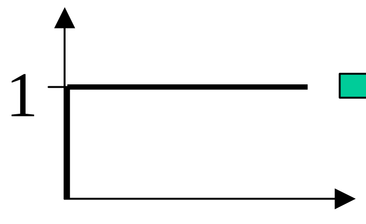



 $\Rightarrow \int dt \Rightarrow$ 

$$\frac{1}{s} \Rightarrow \times \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s^2}$$

William Sandqvist william@kth.se

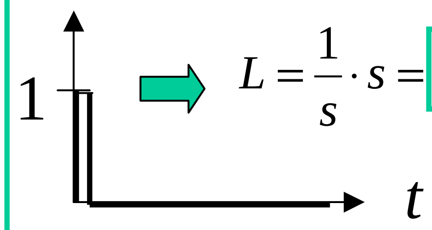
# Ex. **Derivata**/integral



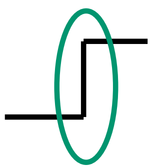

$\Rightarrow L = \frac{1}{s}$

**Impulsen** är ett tidsderiverat **Språng**

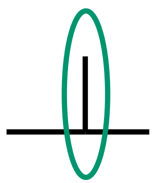
- Derivering $\cdot s$




$\Rightarrow L = \frac{1}{s} \cdot s = \boxed{1}$



$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Rightarrow$



$$\frac{1}{s} \Rightarrow \times s \Rightarrow 1$$

Testsignalerna **Språng**, **Ramp** och **Impuls** är besläktade med varandra och kan därför ge *samma* information om ett system.

# Begynnelse och slutvärde

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s) \qquad \bullet \text{ slutvärde}}$$

*Vad som händer efter lång tid avgörs av laplacetransformens lågfrekvensegenskaper.*

William Sandqvist william@kth.se

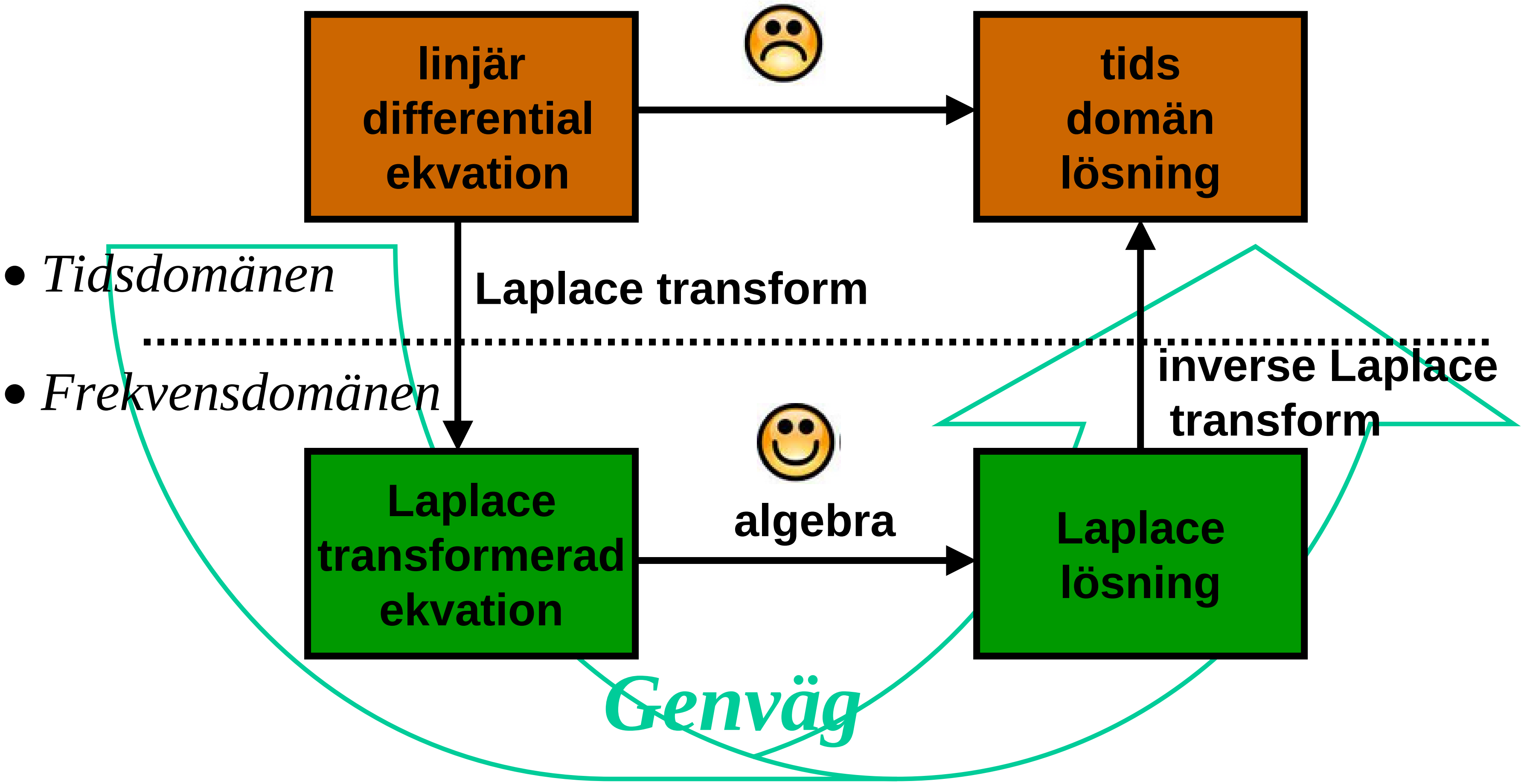
# Ex. Laplacetransformtabell

## Basic Laplace Transform Pairs

| Signal or Function | f(t) | F(s) |
|---|---|---|
| Impulse | $\delta(t)$ | $1$ |
| Step | $u(t) = 1, \quad t \geq 0$ | $\frac{1}{s}$ |
| Ramp | $r(t) = t, \quad t \geq 0$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| Exponential | $e^{-\alpha t} \quad e^{-\alpha t} u(t)$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ |
| Damped Ramp | $te^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ |
| Sine | $\sin(\beta t)$ | $\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$ |
| Cosine | $\cos(\beta t)$ | $\frac{s}{s^2+\beta^2}$ |
| Damped Sine | $e^{-\alpha t}\sin(\beta t)$ | $\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ |
| Damped Cosine | $e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ |
| Simple Complex Pole | see next pg | see next pg |

William Sandqvist william@kth.se

# Laplacetransformeringsmetoden



# Dynamik hos processmodeller

- Process med en tidskonstant
- Process med två tidkonstanter
- Process med tre tidkonstanter
- Andra ordningens system med komplexa rötter
- ( Processer med både poler och 0-ställen) - senare

# Dynamik hos processmodeller

*Ex.*

$$G = \frac{10}{5s+1}$$

## • Process med ***en*** tidkonstant

- Stegsvar $1/s$
- Impulssvar $1$

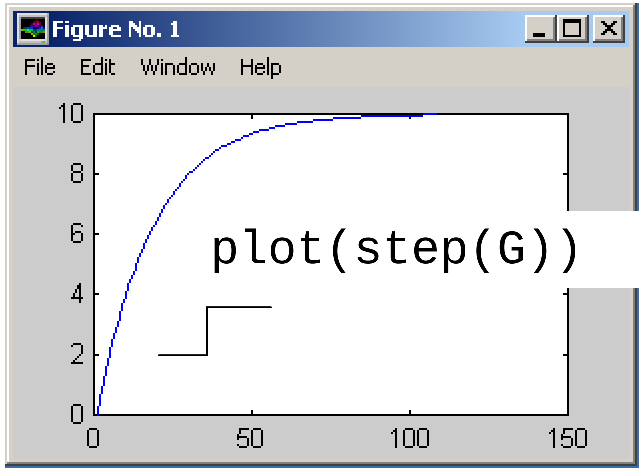
$$U \rightarrow \boxed{G = \frac{K}{Ts+1}} \rightarrow Y$$

$$Y = G \cdot U = \boxed{\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}}$$

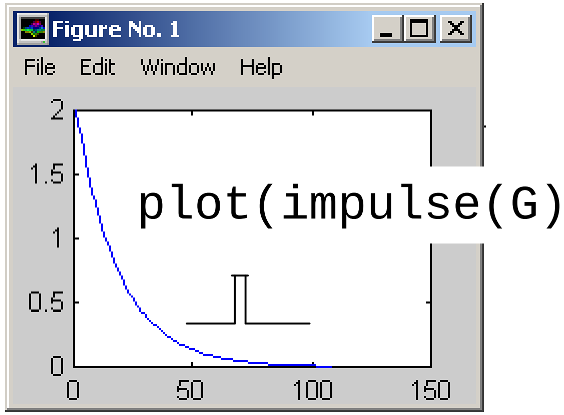
$$Y = G \cdot U = \boxed{\frac{K}{Ts+1} \cdot 1}$$

Matlab-kommandon

```
G=tf([10],[5,1])
plot(step(G))
plot(impulse(G))
```




***Tidsfunktionerna fås algebraiskt med Laplacetabell eller numeriskt med Matlab***

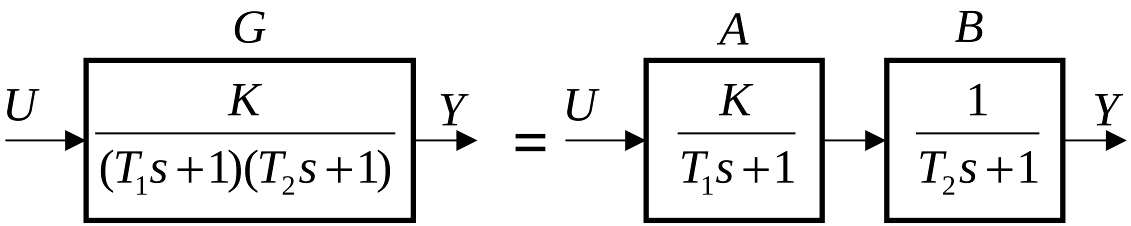


# Dynamik hos processmodeller

*Ex.*

$$G = \frac{10}{(5s+1)(3s+1)}$$

- Process med ***två*** tidkonstanter



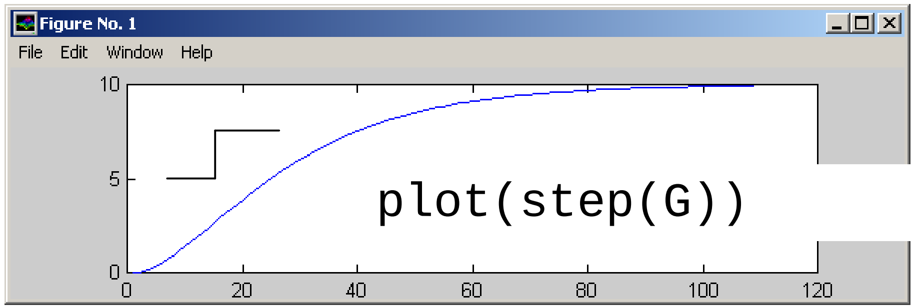

Matlab-kommandon

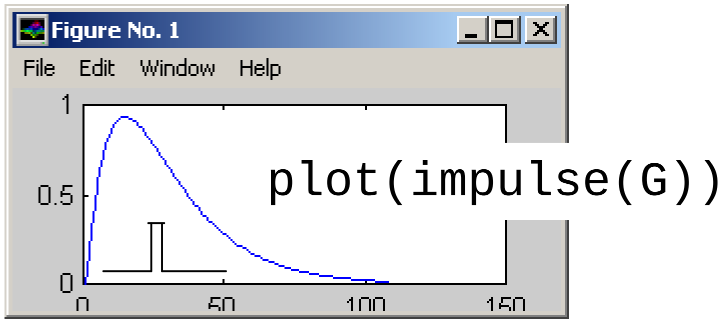
```
A=tf([10],[5,1]);
B=tf(1,[3,1]);
G=series(A,B);
```

```
» A=tf(10,[5,1])
Transfer function:
  10
-------
5 s + 1
```

```
» B=tf(1,[3,1])
Transfer function:
    1
-------
3 s + 1
```

```
» G=series(A,B)
Transfer function:
        10
----------------
15 s^2 + 8 s + 1
```



# Dynamik hos processmodeller

*Ex.*

$$G = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

- Process med **komplexa rötter** (ordningstal två)

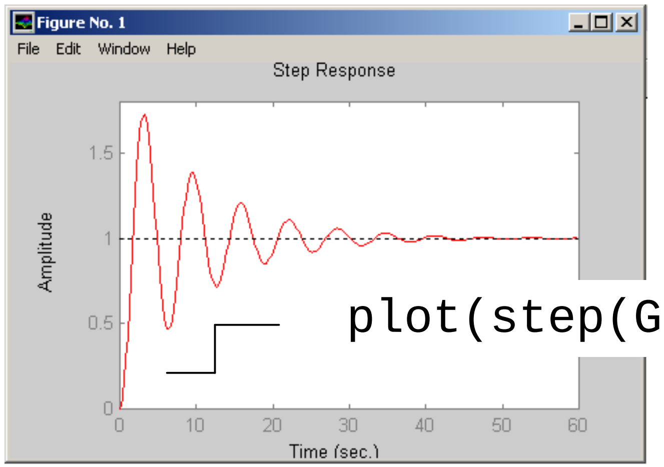
Om en överföringsfunktions täljare har komplexa rötter så får stegsvaret ”översvängar”. Överföringsfunktionen brukar då anges med **parametrar** $\omega_0$ och $\zeta$ .

$$G = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta^2\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$\omega_0$ Resonansfrekvens (odämpad)

$\zeta$ Dämpfaktor

```
w0=1;
Z=0.1;
[num,den]=ord2(w0,Z);
G=tf(num,den)
plot(step(G));
```



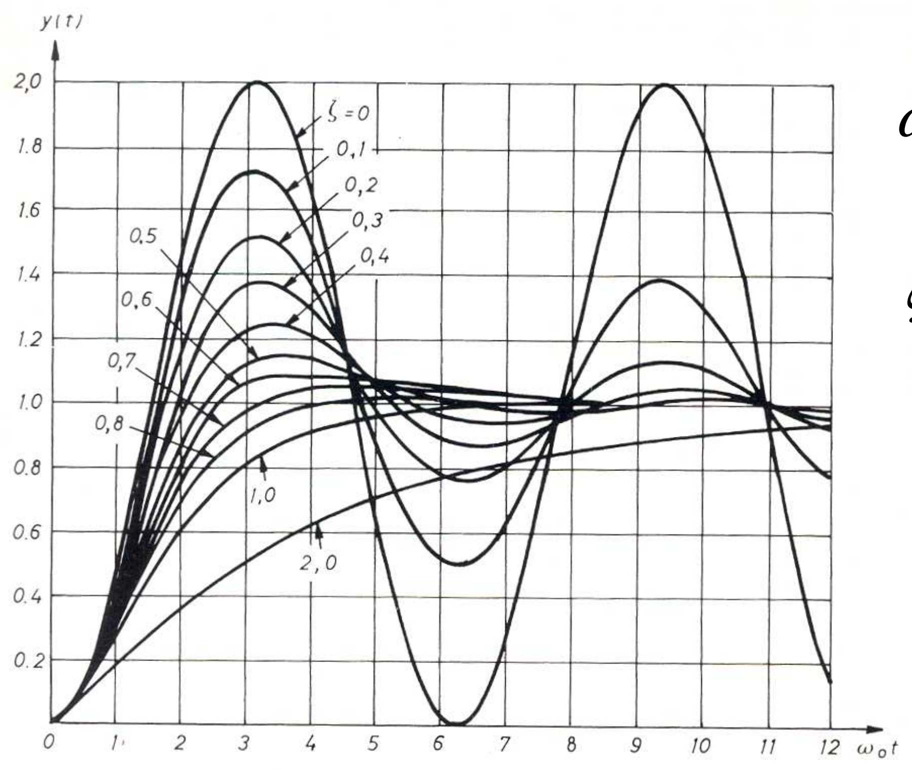

plot(step(G))

# Dynamik hos processmodeller

*Ex.*

$$G = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

• Process med **komplexa rötter** (ordningstal två)




$\omega_0$ Resonansfrekvens (odämpad)

$\zeta$ Dämpfaktor

Dämpfaktor 0 … 2

$$\boxed{G = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}}$$

# 6.13 Processparametrar

Beskriv processens stegsvar.
Relativa dämpningen $\zeta$. Odämpad egen-svängning $\omega_0$. Översväng $M_p$, tid för översväng $t_p$.

*Givet:*

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0{,}96s + 2}$$

**?**

Formelsamling (2:a ordningens system med komplexa rötter):

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \qquad M_P = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \qquad t_P = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

# 6.13 lösning Processparametrar

Processens stegsvar. Relativa dämpningen ζ. Odämpad egensvängning $\omega_0$. Översväng $M_p$, tid för översväng $t_p$.

*Givet:*

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0{,}96s + 2} \quad \textbf{?}$$

Parametrar för andra ordningens system:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + \boxed{0{,}96}s + \boxed{2}} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \boxed{2\zeta\omega_0}s + \boxed{\omega_0^2}}$$

$$\omega_0^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\omega_0} = \sqrt{2}$$

$$K = 1$$

$$2\zeta\omega_0 = 0{,}96$$

$$\Rightarrow \boxed{\zeta} = \frac{0{,}96}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}34$$

# 6.13 lösning Processparametrar

Formelsamling (2:a ordningens system med komplexa rötter):

$$G(s)=\frac{K\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2} \qquad M_P=\exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \qquad t_P=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\boxed{M_P}=\exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]=$$

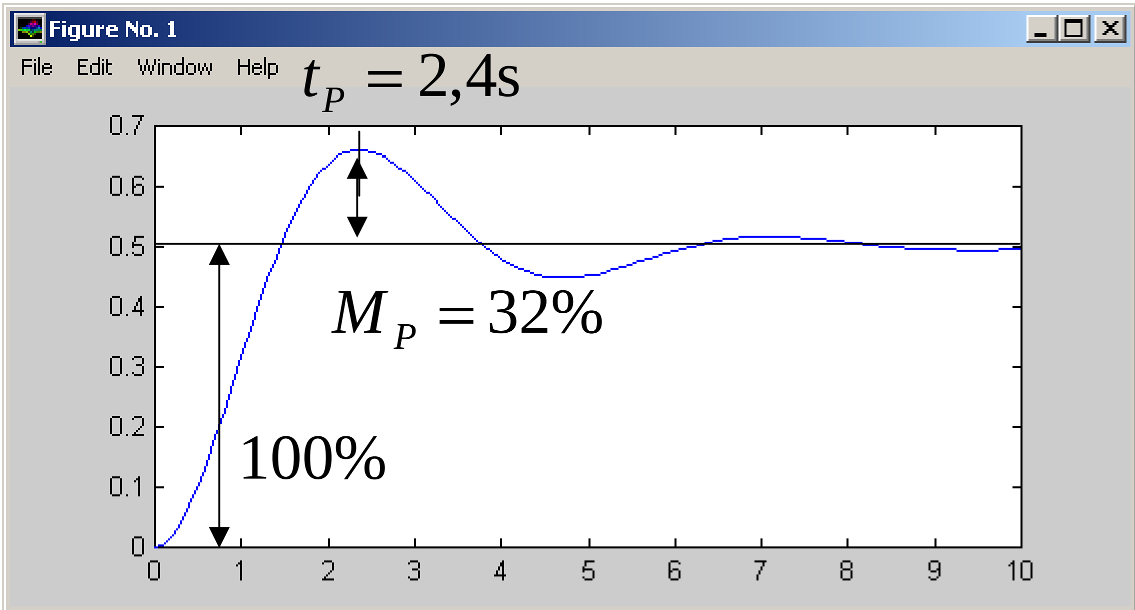
$$=\exp\frac{-0{,}34\cdot\pi}{\sqrt{1-0{,}34^2}}\approx 0{,}32\ \boxed{32\%}$$

$$\boxed{t_P}=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-0{,}34^2}}\approx\boxed{2{,}4\text{s}}$$

# 6.13 Process stegsvar MATLAB

```
T=0:0.1:10;
wn=sqrt(2); Z=0.34;
[num,den]=ord2(wn,Z);
G=tf(num,den)
plot(T,step(G,T));
```



# **6.5** Från diffekv. till överföringsfunktion

a) $y'+5y = x$

b) $y''+3y = 4x$

c) $y''-5y'+6y = x$

d) $y''-3y'+2y = 3x'+x$

e) $\ddot{y}+3\dot{y}+2y-\dot{x}+3x=0$

f) $4(\ddot{y}+3\dot{y}+\dot{x})+8\ddot{x}=0$

g) $\ddot{y}+\dot{y}+3y=2\dot{x}$

# 6.5 **a,b** lösning, överföringsfunktion

a) $y'+5y = x$

$$L[y'+5y] = L[x] \quad \Leftrightarrow \quad sY + 5Y = X \quad \boxed{\frac{Y}{X} = \frac{1}{s+5}}$$

b) $y''+3y = 4x$

$$L[y''+3y] = L[4x] \quad \Leftrightarrow \quad s^2Y + 3Y = 4X \quad \boxed{\frac{Y}{X} = \frac{4}{s^2+3}}$$

# 6.5 **c,d** lösning, överföringsfunktion

c) $y''-5y'+6y = x$

$$L[y''-5y'+6y] = L[x] \quad \Leftrightarrow \quad s^2Y - 5sY + 6Y = X$$

$$\boxed{\frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}}$$

d) $y''-3y'+2y = 3x'+x$

$$L[y''-3y'+2y] = L[2x'+x] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{Y}{X} = \frac{3s+1}{s^2 - 3s + 2}}$$

# 6.6 överföringsfunktion

a) $y = x + 5\int x\,dt + 2\dot{x}$ PID-regulator

b) $y = 5x + 3\int x\,dt$ PI-regulator

c) $y(t) = x(t-5)$ Dödtidsprocess

d) $y'(t) + y(t) = 2x(t-10)$ Dödtidsprocess

# 6.6 **a** lösning, överföringsfunktion

a) $y = x + 5\int x dt + 2\dot{x}$ PID-regulator

$$L[y] = L\left[x + 5\int x dt + 2\dot{x}\right] \Leftrightarrow Y = X + \frac{5}{s}X + 2sX$$

$$\boxed{\frac{Y}{X} = 1 + \frac{5}{s} + 2s}$$

# 6.6 **c** lösning, överföringsfunktion

c) $y(t) = x(t-5)$ Dödtidsprocess

$$L[y(t)] = L[x(t-5)] \Leftrightarrow Y = e^{-5s} X \Rightarrow \boxed{\frac{Y}{X} = e^{-5s}}$$

# **6.7** från överföringsfunktion till diffekv.

a) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3+s}{s^2+4s+1}$$

b) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2e^{-3s}}{5s+1}$$

c) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 3+4s$$

d) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+4}{2s^2+3}$$

# 6.7 **a** lösn. $G(s)$ till diffekv.

a) $$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3+s}{s^2+4s+1}$$

$$s^2Y + 4sY + Y = 3U + sU \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{y} + 4\dot{y} + y = \dot{u} + 3u}$$

William Sandqvist william@kth.se

# Laplacetransformtabell

$L[f(t)]$

$L^{-1}[F(s)]$

| Laplacetransform $F(s)$ | Tidsfunktion $f(t)$ för $t > 0$ |
|---|---|
| $1$ | Impulsfunktion $\delta(t)$ |
| $\frac{1}{s}$ | Stegfunktion $\sigma(t)$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | Rampfunktion $t$ |
| $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{t^2}{2}$ |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ |
| $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ |
| $\frac{1}{s(1+as)}$ | $1-e^{-\frac{t}{a}}$ |
| $\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$ | $1-\frac{a\cdot e^{-\frac{t}{a}}}{a-b}-\frac{b\cdot e^{-\frac{t}{b}}}{b-a}$ |
| $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$ | $\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$ |
| $\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$ | $\frac{(a-b)e^{-bt}-(a-c)e^{-ct}}{c-b}$ |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $t\cdot e^{-at}$ |
| $\frac{1}{s^2+a^2}$ | $\frac{1}{a}\cdot \sin at$ |
| $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| $\frac{1}{s(s^2+a^2)}$ | $\frac{1}{a^2}[1-\cos at]$ |
| $\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$ | $\frac{1}{a^3}[at-\sin at]$ |
| $\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$ | $e^{-at}\cdot \cos bt$ |
| $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$ | $e^{-at}\cdot \sin bt$ |

William Sandqvist william@kth.se

# **6.8** stegsvar från överföringsfunktion

a) $G(s)=\dfrac{1}{s^2+16}$

b) $G(s)=\dfrac{3}{s^2+9}$

c) $G(s)=\dfrac{1}{s+2}$

d) $G(s)=\dfrac{3}{s}$

e) $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$

f) $G(s)=\dfrac{4}{s(s^2+4)}$

# 6.8 **a** lösning stegsvar

a) $$G(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$$

$$L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

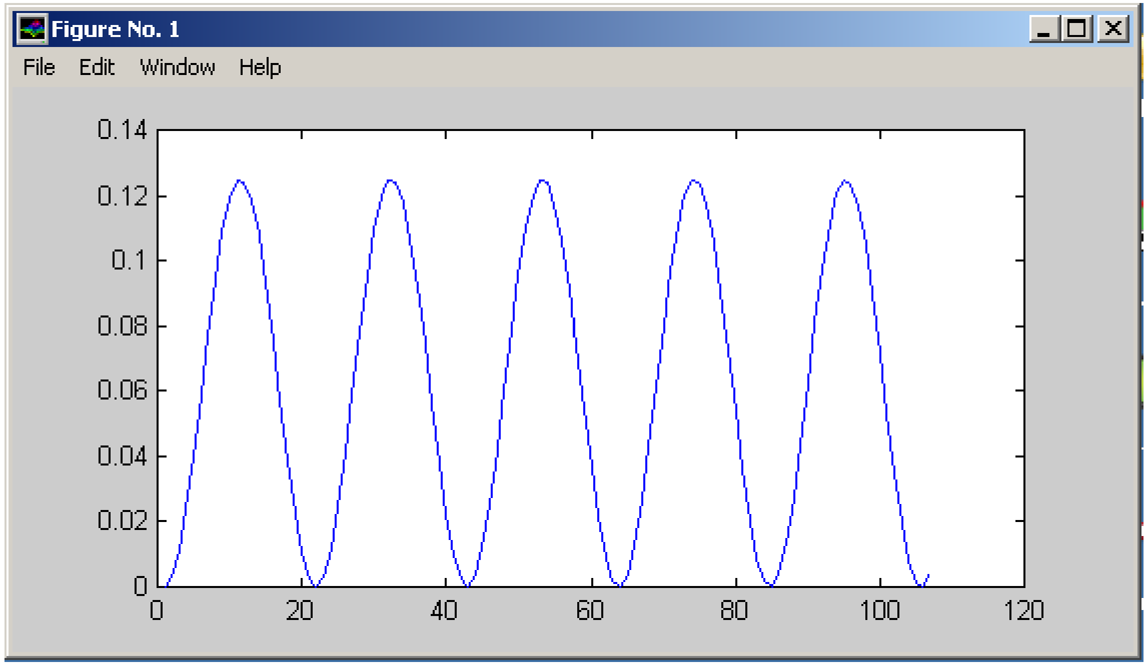
| $F(s) \quad \Leftrightarrow$ | $f(t) \quad t > 0$ |
|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | Stegfunktion $\sigma(t)$ |
| $\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$ | $\frac{1}{a^2}[1 - \cos at]$ |

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 16)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{16}(1 - \cos 4t)}$$

# 6.8 **a** lösning MATLAB

a) $$G(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$$

```
G=tf([1],[1,0,16]);
plot(step(G));
```



# 6.8 **c** lösning stegsvar

c) $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$L[unitstep] = \dfrac{1}{s}$

| $F(s)$ | $\Leftrightarrow$ | $f(t) \quad t > 0$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{s}$ | | Stegfunktion $\sigma(t)$ |
| $\dfrac{1}{s(1+as)}$ | | $1 - e^{-\frac{t}{a}}$ |

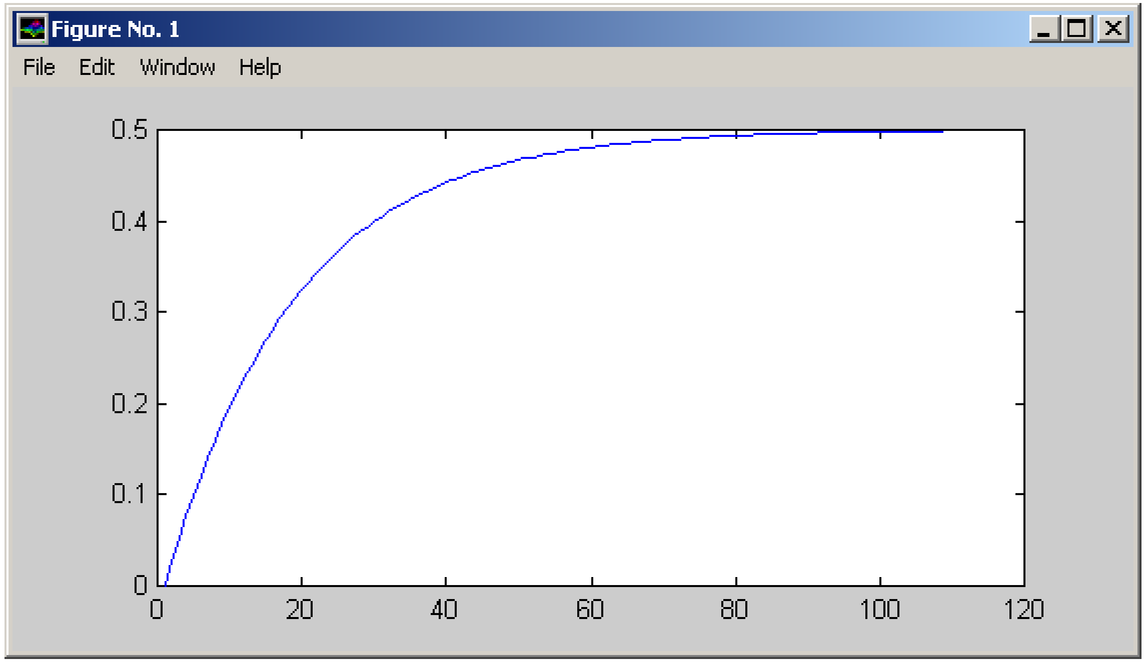
$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(0{,}5s+1)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}5}}\right) = \boxed{0{,}5\left(1 - e^{-2t}\right)}$$

# 6.8 **c** lösning MATLAB

c) $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$

```
G=tf([1],[1,2]);
plot(step(G));
```



# 6.8 **e** lösning stegsvar

e) $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

$$L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

| $F(s)$ | $\Leftrightarrow$ | $f(t) \quad t > 0$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | | Stegfunktion $\sigma(t)$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | **?** | Rampfunktion $t$ |
| $\frac{1}{s+a}$ | | $e^{-at}$ |

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{s^2(s+1)} \quad \textbf{?}$$

- Finns ej med i tabellen – då måste man partialbråksuppdela …

# 6.8 **e** lösning stegsvar

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{s+1}$$

Det kan ha stått så här innan man gjorde allt liknämnigt!

(ansätt täljarens gradtal ett gradtal lägre än nämnarens)

$$\frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{s+1} = \frac{(as+b)(s+1)+cs^2}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{(a+c)s^2 + (a+b)s + b}{s^2(s+1)} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} = \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

# 6.8 **e** lösning stegsvar

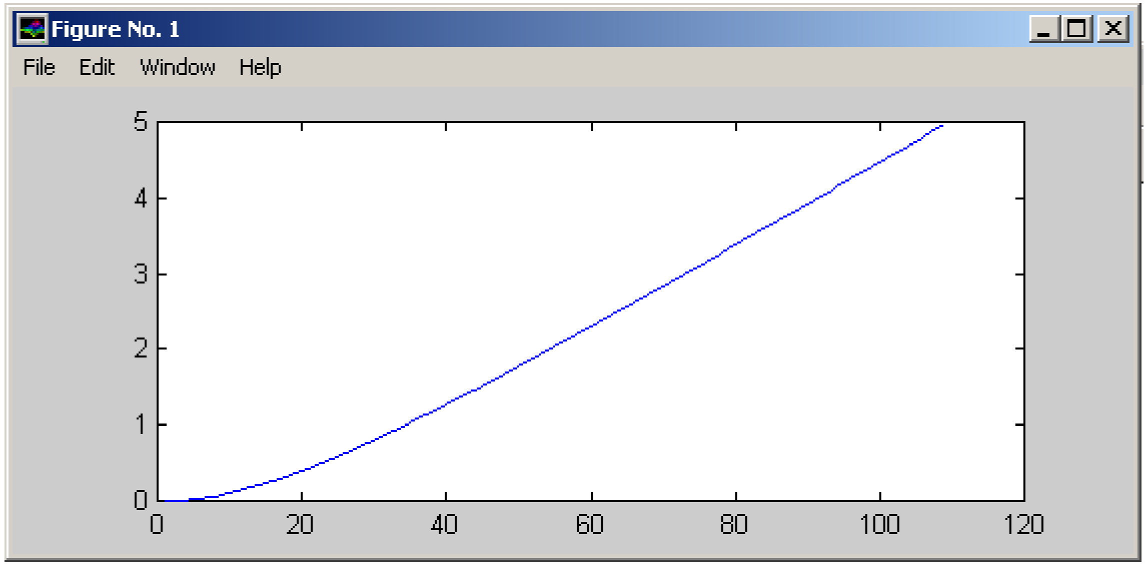
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \qquad \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{-1s+1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$-\frac{\cancel{s}}{\cancel{s^2}} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -1 + t + e^{-t}}$$

# 6.8 **e** lösning MATLAB

e) $$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

```
G=tf([1],[1, 1, 0]);
plot(step(G));
```




$$y(t) = -1 + t + e^{-t}$$

# 6.12 Partialbråksuppdelning

a) $G(s) = \dfrac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

b) $G(s) = \dfrac{4s+2}{s(s+1)(s+2)}$

c) $G(s) = \dfrac{4s^2+7s+4}{(s+2)(s^2+s+1)}$

d) $G(s) = \dfrac{3s^2-2s+1}{(s-3)(s-2)(s-1)}$

e) $G(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{s^3+2s^2+3s+2}$

f) $G(s) = \dfrac{5s+12}{s^2+5s+6}$

# 6.12 **a** lösn. metod Handpåläggning

a) $G(s) = \dfrac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} = \frac{\boxed{\dfrac{9-3(-1)}{(-1)+7}}}{s+1} + \frac{\dfrac{9-3(-7)}{(-7)+1}}{s+7}$$

$s=-1$ $\Rightarrow 0$

$s=-7$ $\Rightarrow 0$

$$G(s) = \frac{\boxed{\frac{12}{6}}}{s+1} + \frac{\quad}{s+7} = \frac{2}{s+1} + \frac{\quad}{s+7}$$

William Sandqvist william@kth.se

# 6.12 **a** lösn. metod Handpåläggning

a) $G(s)=\dfrac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}=\frac{\dfrac{9-3(-1)}{(-1)+7}}{s+1}+\frac{\boxed{\dfrac{9-3(-7)}{(-7)+1}}}{s+7}$$

$s=-1$

$\Rightarrow 0$

$s=-7$

$\Rightarrow 0$

$$G(s)=\frac{\frac{12}{6}}{s+1}+\frac{\boxed{\frac{30}{6}}}{s+7}=\frac{2}{s+1}+\frac{5}{s+7}$$

William Sandqvist william@kth.se

# 6.12 **a** lösn. metod Handpåläggning

a) $G(s) = \dfrac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} = \frac{\dfrac{9-3(-1)}{(-1)+7}}{s+1} + \frac{\dfrac{9-3(-7)}{(-7)+1}}{s+7}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s+7}}$$

# 6.9 Impulssvar från överföringsfunktion

a) $$G(s)=\frac{2}{s^2+5s+6}$$

b) $$G(s)=\frac{s+1}{s^2+4}$$

c) $$G(s)=\frac{3}{s+1}$$

d) $$G(s)=\frac{2}{s(1+5s)}$$

# 6.9 **a** lösning impulssvar

a) $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 5s + 6}$

| $F(s)$ | $\Leftrightarrow$ | $f(t) \quad t > 0$ |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ | | $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$ |

$L[impulse] = 1$

$s^2 + 5s + 6$ $p$, $q$-formeln

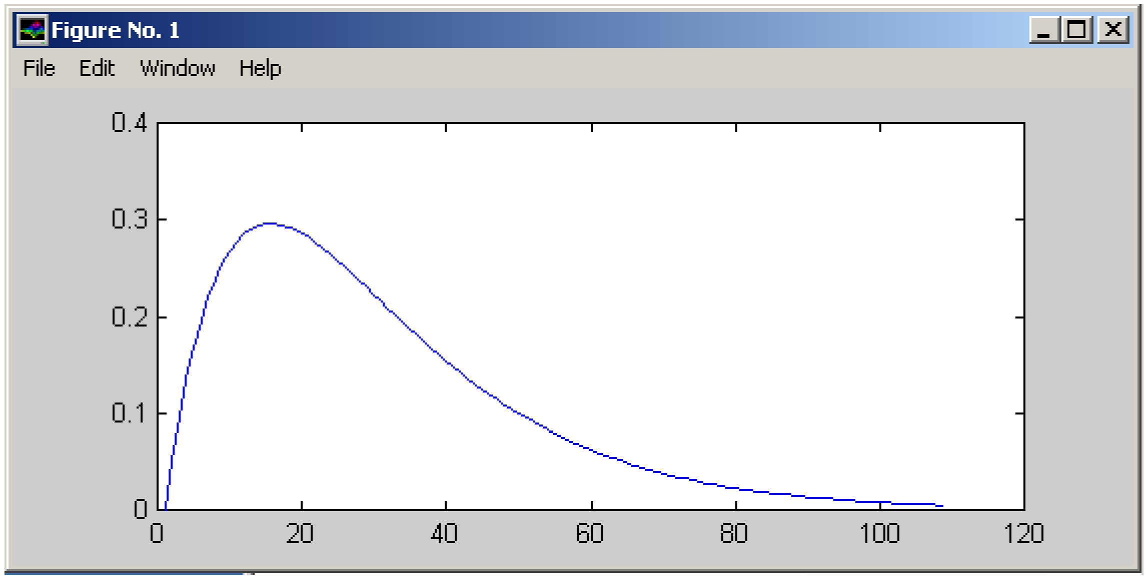
$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \quad s_1 = -2 \quad s_2 = -3$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})}$$

# 6.9 **a** lösning MATLAB

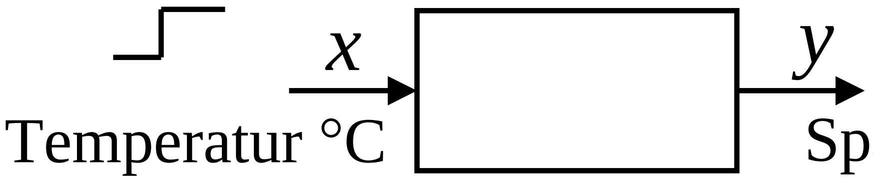
a) $G(s) = \dfrac{2}{s^2 + 5s + 6}$

```
G=tf([2],[1, 5, 6]);
plot(impulse(G));
```




$$y(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})$$

# **6.10** stegsvar från tempsensor




$$G(s) = \frac{0{,}2}{10s + 1}$$

*Rita stegsvaret?*

William Sandqvist william@kth.se

# 6.10 lösning, stegsvar

$$G(s) = \frac{0{,}2}{10s+1}$$

$$L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

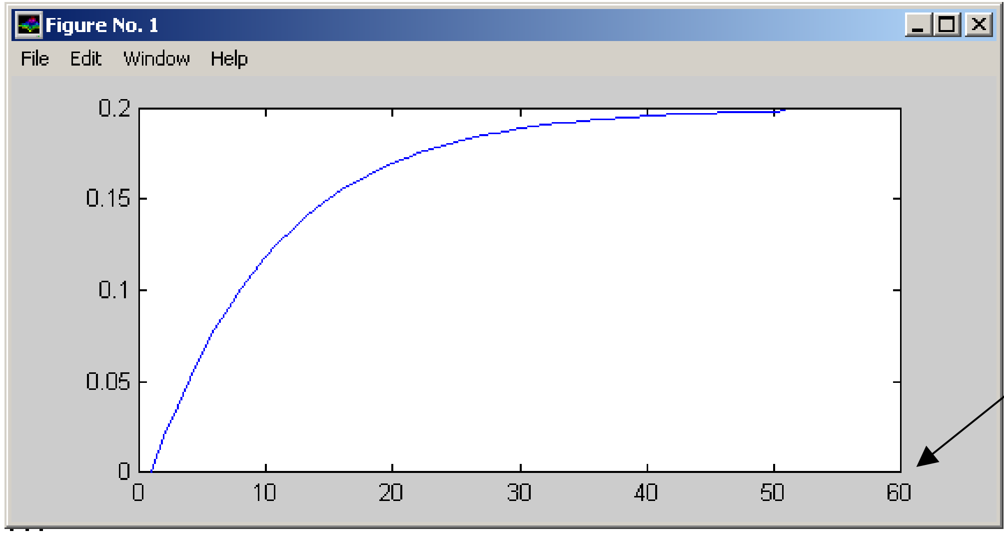
| $F(s)$ | $\Leftrightarrow$ | $f(t) \quad t>0$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{s(1+as)}$ | | $1-e^{-\frac{t}{a}}$ |

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{0{,}2}{10s+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = 0{,}2(1-e^{-\frac{t}{10}})}$$

# 6.10 lösning, MATLAB

$$G(s) = \frac{0,2}{10s+1}$$

```
T= 0:1:50; % 0…50 sek
G=tf([0.2],[10, 1]);
plot(T,step(G,T));
```



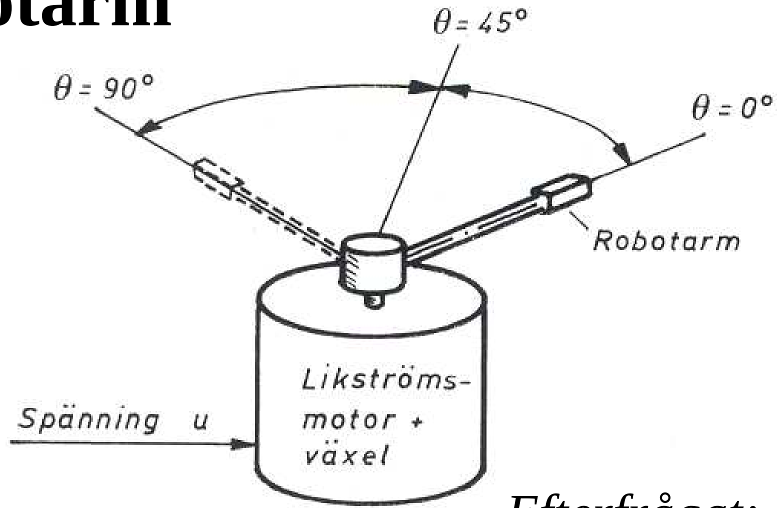

Vi har skickat med en tidvektor T, nu stämmer tidskalan.

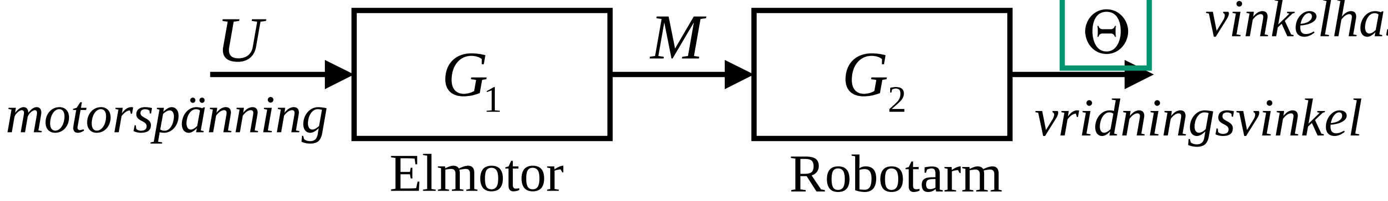
$$y(t) = 0,2(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

# 6.4 Robotarm

$$G_1\left(\frac{M[\mathrm{Nm}]}{U[\mathrm{V}]}\right) = \frac{3}{1+T_f s}$$

$$G_2\left(\frac{\Theta[rad]}{M[Nm]}\right) = \frac{1}{Js^2 + bs}$$




*Efterfrågat:*
*vinkelhastighet?*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Theta}$$

Vad blir robotarmens sluthastighet i sorten **varv/minut** [rpm] om ett spänningssprång $U$ = 6 [V] läggs på motorn?
Använd slutvärdessatsen. Robotarmens tröghetsmoment J = 0,45 [kgm$^2$].
Luftmotståndet $b$ = 1,3 [Nm/rad]. Motorns tidkonstant $T_f$ = 0,7 [s].

William Sandqvist william@kth.se

## 6.4 Robotarm lösning

*slutvärdessatsen*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)}$$

- *tidsderivata*

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) = s\cdot\Theta(s) \quad \Rightarrow G\left(\frac{\dot{\Theta}[\text{rad/sek}]}{U[\text{V}]}\right) = s\cdot G_1 G_2$$

- *stegändring*

$$U(s) = \frac{6}{s}$$

*Sökt vinkelhastighet*

$$\boxed{\dot{\Theta}(s) = U(s)\cdot G} = s\cdot G_1 G_2 = \quad \frac{6}{\cancel{s}}\cdot\cancel{s}\cdot\frac{3}{(1+T_f s)}\cdot\frac{1}{(Js^2+bs)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\Theta}(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot\dot{\Theta}(s) = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{18}{(1+T_f s)\cancel{s}(b+Js)} = \frac{18}{b}$$

$$\frac{18}{b} = \frac{18}{1{,}3}[\text{rad/s}] = \frac{18}{1{,}3}\cdot\frac{60}{2\pi}[\text{rpm}] = 130[\text{rpm}]$$

# 6.4 robotarm - MATLAB

```
D = s
```

```
            3
G1= ---------
      0.7 s + 1
```

```
                  1
G2= -----------------
    0.45 s^2 + 1.3 s
```

```
T=0.7; b=1.3; J=0.45;
D=tf([1, 0],[0, 1])
G1=tf([3],[T, 1])
G2=tf([1],[J, b, 0])
G=series(D, G1)
G=series(G,G2)

plot( ( 6*60/(2*pi) )*step(G) );
```

Spänningssprång 6V och omvandling mellan rad/s till varv/s

# 6.4 robotarm - MATLAB

$$G\left(\frac{\dot{\Theta}[\text{rad/sek}]}{U[\text{V}]}\right) = s \cdot G_1 G_2$$

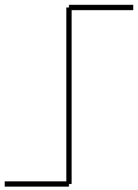
MATLAB `series()` beräknar den totala överföringsfunktionen.

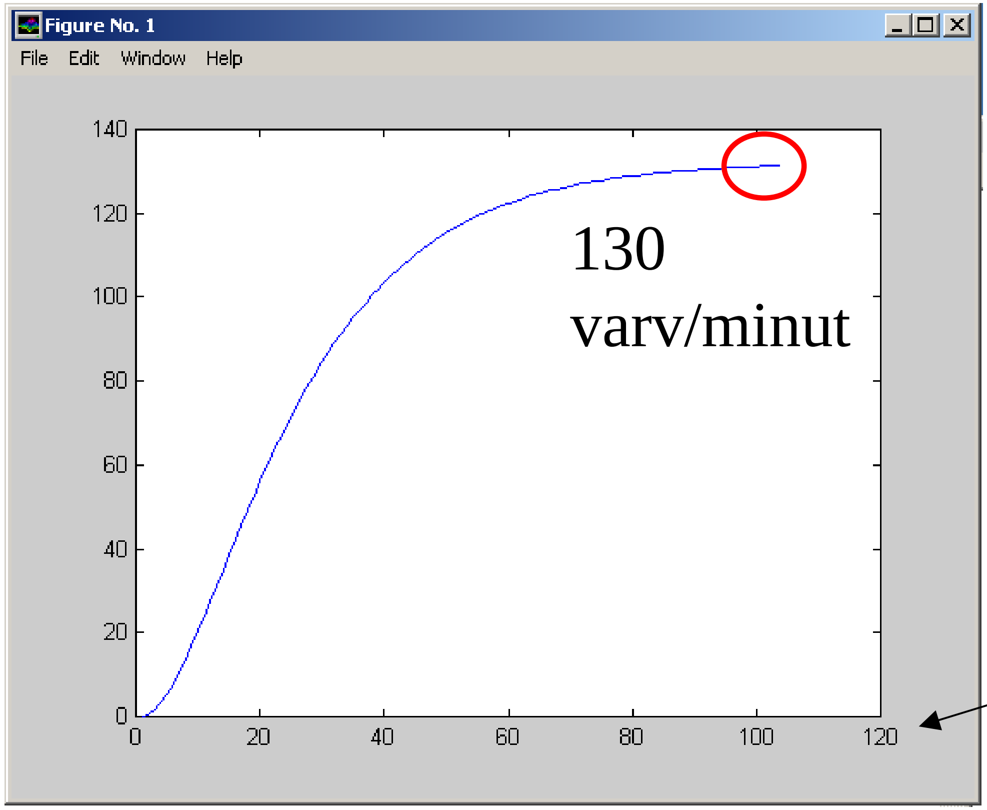
```
                   3 s
G = ----------------------------
    0.315 s^3 + 1.36 s^2 + 1.3 s
```

William Sandqvist william@kth.se

# 6.4 robotarm - MATLAB

Spännings-
språng 6V






Inte tid
direkt, utan
samplens
nummer

```
plot( ( 6*60/(2*pi) )*step(G) );
```

# **6.11** stegsvar från robotarm


$$2\ddot{y}+\dot{y}=u$$

*Rita stegsvaret?*

William Sandqvist william@kth.se

# 6.11 lösning, stegsvar

Överföringsfunktion:

$$2\ddot{y} + \dot{y} = u \quad \Leftrightarrow \quad L[2\ddot{y} + \dot{y}] = L[u]$$

$$2s^2Y + sY = U \qquad \frac{Y}{U} = \frac{1}{2s^2 + s}$$

Stegsvar: $L[unitstep] = \frac{1}{s}$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2s^2 + s} = \frac{1}{s^2(2s+1)}$$

**? Finns *inte* i transformtabellen!**

William Sandqvist william@kth.se

# 6.11 lösning, stegsvar

Partialbråksuppdela:

$$\frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{2s+1} =$$

$$= \frac{(as+b)(2s+1)+cs^2}{s^2(2s+1)} = \frac{(2a+c)s^2+(a+2b)s+b}{s^2(2s+1)}$$

$$\begin{cases} 2a+c=0 \\ a+2b=0 \\ b=1 \end{cases} = \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2s+1}{s^2} + \frac{4}{2s+1}$$

# 6.11 lösning, stegsvar

$$\frac{-2s+1}{s^2}+\frac{4}{2s+1}=$$

$$=\frac{-2}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s+0{,}5}$$

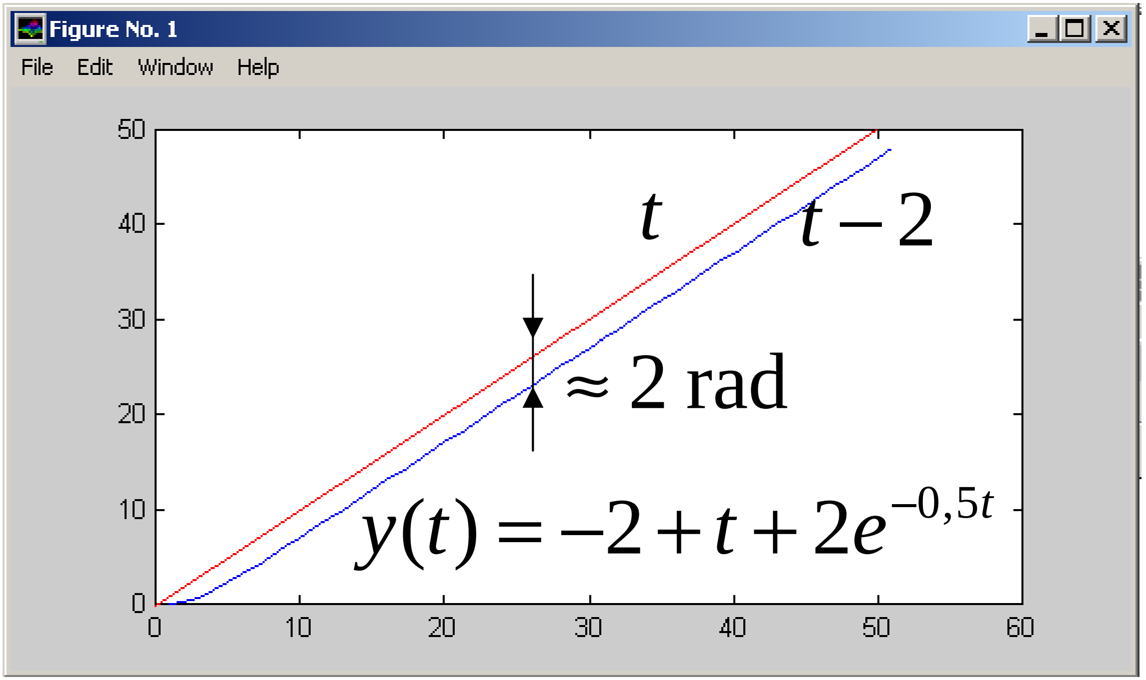
| $F(s)$ $\Leftrightarrow$ | $f(t)$ $t>0$ |
|---|---|
| $\frac{1}{s}$ | Stegfunktion $\sigma(t)$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | Rampfunktion $t$ |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ |

$$\boxed{y(t)=-2+t+2e^{-0{,}5t}}$$

# 6.11 lösning, MATLAB

$$G = \frac{1}{2s^2 + s}$$

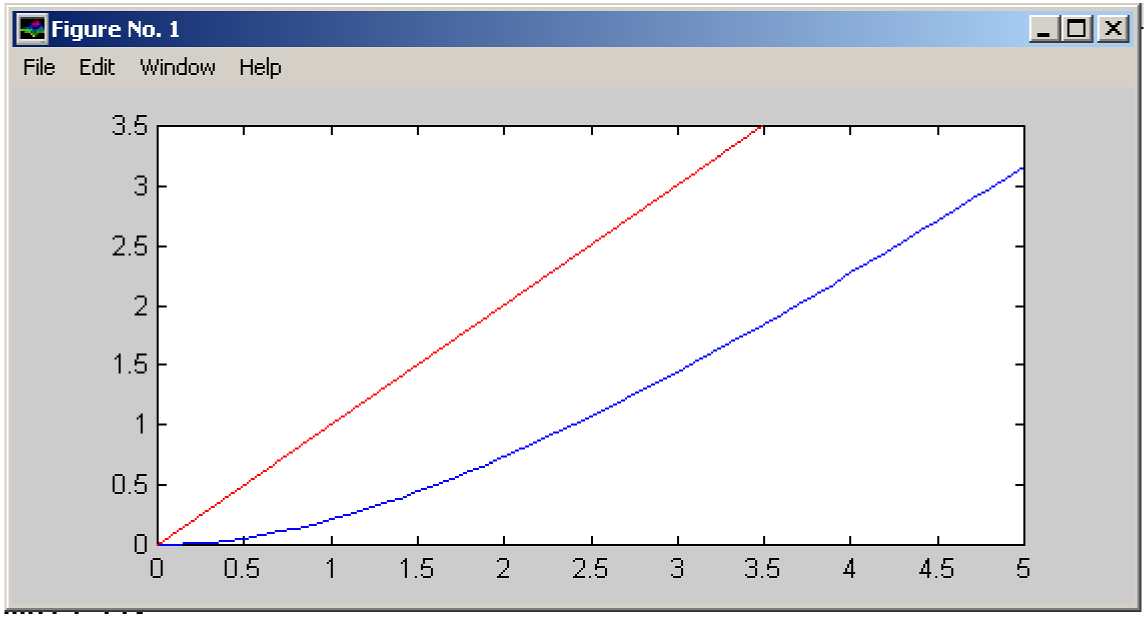
```
T= 0:1:50; % 0…50 sek
G=tf([1],[2, 1, 0]);
plot(T,step(G,T));
```



# 6.11 MATLAB förstoring

$$G = \frac{1}{2s^2 + s}$$

```
T= 0:0.1:5;
G=tf([1],[2, 1, 0]);
plot(T,step(G,T));
```




Det robotarmen missar i starten tar den aldrig igen – det kan vi kanske förbättra senare i kursen! (med ett reglersystem).

# 6.14 Diffekv. poler/0-ställen

a) $y''+9y'+14y=3u$

b) $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+14y=\dot{u}+4u$

c) $y''+4y'+3y=u'+u$

1) Överföringsfunktioner
2) Poler och 0-ställen
3) Statisk förstärkning
4) Tidkonstanter

# 6.14 **a** lösn. Diffekv. poler/0-ställen

a) $y''+9y'+14y=3u$

$$y''+9y'+14y=3u \quad \Leftrightarrow \quad s^2Y+9sY+14Y=3U$$

$$G(s)=\frac{3}{s^2+9s+14} \qquad s=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-14}$$

Poler:
$s_1=-2 \quad s_2=-7$

$$G(s)=\frac{3}{(s+2)(s+7)}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2\cdot 7}(1+\boxed{\tfrac{1}{2}}s)(1+\boxed{\tfrac{1}{7}}s)}$$

$$Gain=G(s\rightarrow 0)=\frac{3}{2\cdot 7}\approx 0{,}21 \qquad \tau_1=0{,}5 \quad \tau_2=0{,}15$$

# 6.14 **a** lösn. poler/0-ställen MATLAB

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 9s + 14}$$

```
G=tf([3],[1,9,14]);
pzmap(G);
```