Föreläsning 8, Introduktion till tidsdiskret reglering, Z-transfomer, Överföringsfunktioner

Reglerteknik, IE1304

Innehåll

Innehåll

Vad är tidsdiskret reglering?

- Regulatorn arbetar i diskret tid, styrsignalen ändras endast vid diskreta tidpunkter, bild sid 46.
- Regulatorn är datorbaserad.

Fördelar med datorbaserad reglerteknik

- *Mer avancerade regulatorer.*
  - Mycket mer avancerade algoritmer kan programmeras jämfört med att bygga dem med analoga komponenter.
- *Mer avancerade identifieringsmetoder.*
  - Möjligt bestämma överföringsfunktioner experimentellt.
- *Förbättringar av praktisk karaktär.*
  - Bildskärmar och andra displayer.
  - Lagring och analys av gamla mätvärden.
  - Kommunikation med andra regulatorer och övriga system.
  - Linearisering, filtrering, larm osv

Komponenter i tidsdiskreta reglersystem

- Bild sid 292, 293.
- Dator, D/A- och A/D-omvandlare nytt.
- Styrdon, givare och process samma som vid kontinuerlig reglering.
- Börvärdesgivare och jämförare behövs ej.

Reglerprinciper för diskret reglering

- Regulatorns utsignal är den styckvis konstanta signalen $u(k)$, där k betecknar samplingstidpunkt, bild sid 294.
- Regulatorns insignal är det samplade reglerfelet, $e(k) = r(k) - y(k)$.
- $e(k-1), u(k-1)$ är värden ett samplingsintervall bakåt i tiden.
- I stället för differentialekvationer används *differensekvationer*.
  - Exempel: $u(k) = b_1 e(k-1) + b_2 e(k-2) + a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2)$, där a_1, a_2, b_1, b_2 är konstanter.
  - Högre (och lägre) ordningstal kan lätt användas.

Hur dimensionera diskreta regulatorer?

- *Transformera kontinuerlig regulator, tex PID.*
  - Mycket kort samplingsintervall krävs.
- *Direkt dimensionering av diskret regulator.*
  - Kraftfullare, ger möjlighet till flera olika typer av regulatorer.

Tidsdiskret PID-reglering

- Derivatan, $e'(k) \approx \dfrac{e(k) - e(k-1)}{h}$
- Integralen, $\int_0^{kh} e(t)\,\mathrm{d}t \approx h\sum_{i=1}^{k} e(i)$
- h är längden på samplingsintervallet. Kortare samplingsintervall ger bättre approximation av kontinuerliga värden.
- Ovanstående approximationer ger följande differensekvation för en tidsdiskret regulator.

$$u(k) = K\left[e(k) + T_D\frac{e(k) - e(k-1)}{h} + \frac{h}{T_I}\sum_{i=1}^{k} e(i)\right] =$$

$$\begin{cases} w(k) = w(k-1) + e(k) \\ u(k) = K\left[e(k) + T_D\frac{e(k)-e(k-1)}{h} + \frac{h}{T_I}w(k)\right] \end{cases}$$

Innehåll

Definition

- Transformen $F(z)$ till den tidsdiskreta funktionen $f(k)$ bestäms av summan

$$F(z) = Z[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

Transform av stegfunktion

- Bild sid 300.
- Om steget har höjden a blir transformen

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot z^{-k} = a\left(z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\right) =$$

$$a\left[\left(z^{-1}\right)^0 + \left(z^{-1}\right)^1 + \left(z^{-1}\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$[\text{geometrisk summa}] = a\frac{1}{1 - z^{-1}} = a\frac{z}{z - 1}$$

Transform av fördröjd stegfunktion

- Bild sid 301.
- Om steget har höjden *a* blir transformen

$$F(z) = \sum_{k=L}^{\infty} a \cdot z^{-k} = a\left(z^{-L} + z^{-(L+1)} + z^{-(L+2)} + \ldots\right) =$$

$$az^{-L}\left[\left(z^{-1}\right)^0 + \left(z^{-1}\right)^1 + \left(z^{-1}\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$[\text{geometrisk summa}] = az^{-L}\frac{1}{1 - z^{-1}} = az^{-L}\frac{z}{z-1}$$

Transform av puls

- Bild sid 301.
- Om pulsen har höjden *a* blir transformen

$$F(z) = \sum_{k=0}^{0} a \cdot z^{-k} = a \cdot z^{-0} = a$$

Flera transformer

- Tabell sid 302 och 515.
- Se speciellt transformen för a^k

Räkneregler för z-transformen

- Se sid 302-303.
- Superpositionsregeln, z-transformen är en lineär operation.
- Förskjutningssatsen, z^{-L} är den tidsdiskreta fördröjningsoperatorn (vars kontinuerliga motsvarighet är e^{-Lhs}).
- Begynnelsesatsen
- Slutvärdessatsen, gäller om slutvärdet existerar, dvs om $F(z)$ konvergerar.

Innehåll

Metod för att bestämma tidsdiskreta överföringsfunktioner

1. Vi känner ett filters differensekvation och söker dess överföringsfunktion (z-transform).
   Exempel: $y(k) = 5y(k-1) + 3y(k-2) + u(k-1) + 4u(k-2)$
2. Flytta all y-termer till vänster sida.
   Exempel: $y(k) - 5y(k-1) - 3y(k-2) = u(k-1) + 4u(k-2)$
3. z-transformera differensekvationen.
   Exempel: $Y - 5Yz^{-1} - 3Yz^{-2} = Uz^{-1} + 4Uz^{-2}$
4. Bryt ut Y ur vänsterledet och U ur högerledet.
   Exempel: $Y\left[1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}\right] = U\left[z^{-1} + 4z^{-2}\right]$
5. Kvoten mellan Y och U är överföringsfunktionen, $H(z)$.
   Exempel: $H(z) = \dfrac{Y}{U} = \dfrac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}}$

Positiv och negativ representation

- Resultatet från föregående exempel, $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z^{-1} + 4z^{-2}}{1 - 5z^{-1} - 3z^{-2}}$, är skrivet på negativ form, dvs alla z har negativa exponenter.
- Positiv form betyder att alla z har positiva exponenter. Det kan vi få genom att förlänga bråket med den högsta exponenten, z^2 i det här fallet, $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{z + 4}{z^2 - 5z - 3}$

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av överföringsfunktioner

1. Insignalen $u(k)$ till ett filter och filtrets differensekvation är kända. Vi söker utsignalen, $y(k)$.
   Exempel: $y(k) = 0.6y(k-1) + 2.4u(k-1)$, $u(k)$ är ett enhetssteg.
2. Bestäm överföringsfunktionen, $H(z)$, enligt ovan.
   Exempel: $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2.4z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$
3. Bestäm z-transformen, $U(z)$, till differensekvationen, $u(k)$, med hjälp av tabell.
   Exempel: $U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av överföringsfunktioner, forts

4. Bestäm utsignalens transform genom att multiplicera $H(z)$ och $U(z)$.

   Exempel: $Y(z) = \dfrac{2.4z^{-1}}{1-0.6z^{-1}} \cdot \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{2.4z^{-1}}{(1-0.6z^{-1})(1-z^{-1})}$

5. Bestäm utsignalens differensekvation, $y(k)$, genom att inverstransformera $Y(z)$. Detta görs med hjälp av tabell, eventuellt måste uttrycket partialbråksuppdelas först.

   Exempel: I detta fall kan nedersta raden i tabellen på sid 515 användas. Vi har $e^{-a} = 0.6$ och $K(1-e^{-a}) = 2.4$. Detta ger $a = -\ln 0.6, K = 6$, vilket ger utsignalen $y(k) = 6(1-e^{(\ln 0.6)k}) = 6(1-0.6^k), k \geq 0$

- En graf av stegsvaret finns på sid 307.

Metod för att beräkna tidsförlopp med hjälp av iterativa beräkningar

- Om differensekvationen och insignalen är kända kan vi beräkna utsignalen värde för värde genom att sätta in värden av insignal och utsignal i differensekvationen.
- Ett exempel på detta finns på sid 309.

Innehåll

Övningsuppgifter

- 16.1c, 16.4a, 16.5c, 16.6a, 16.6b, 16.7a