

Föreläsning 14-16, Tillståndsmodeller för kontinuerliga system

KTH

26 februari 2014

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Definition av tillståndsmodell

- Hittills har vi beskrivit system med hjälp av differential- (eller differens-) ekvationer och överföringsfunktioner.
- Ett annat sätt att beskriva ett system är med hjälp av en *tillståndsmodell*.
- En tillståndsmodell bygger på att vi definierar systemets *tillstånd* med hjälp av ett antal *tillståndsvariabler*.
- Tillståndsvariablerna för ett system innehåller tillsammans all information som krävs för att vi ska kunna räkna ut hur systemet kommer att reagera på en insignal.

Varför använda tillståndsmodeller?

- Tillståndsmodeller ger mycket enklare beräkningar än överföringsfunktioner för komplexa system. Det kan vara exempelvis system med mer än en in- och/eller utsignal eller system där det är svårt att ställa upp sambandet mellan in- och utsignal i en enda differentialekvation.

Differentialekvationer i tillståndsmodeller

- Sambanden mellan tillståndsvariablerna i en tillståndsmodell beskrivs med ett system av första ordningens differentialekvationer, högre ordning används aldrig.
- Det behövs inga differentialekvationer för att beskriva sambandet mellan tillståndsvariablerna och utsignalen. Utsignalen definieras istället som en lineärkombination av tillståndsvariablerna.

Ett första exempel

- Antag att vi har ett system med en ingång och en utgång, vilket beskrivs av differentialekvationen $y'' + 5y' + 3y = 4u$. Det har alltså överföringsfunktionen $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + 5s + 3}$
- För att göra om det till en tillståndsmodell måste vi för det första definiera tillståndsvariabler och för det andra skriva om differentialekvationen till ett system av första ordningens ekvationer i stället för en ekvation av högre ordning.
- Definera tillståndsvariablerna $x_1 = y$ och $x_2 = y'$. Vi kan nu skriva differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' + 5x_2 + 3x_1 = 4u \end{cases}; \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -5x_2 - 3x_1 + 4u \end{cases}$$

Ett första exempel, forts

- Ovanstående ekvationer kan skrivas om på matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot u$$

- Sedan lägger vi till en ekvation som visar hur utsignalen beräknas med hjälp av tillståndsvariablerna.

$$y = x_1, \text{ vilket på matrisform blir } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ett första exempel, forts

- Systemet beskrivs nu fullständigt av de tre matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och ekvationerna $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, $y = \mathbf{Cx}$

- Matriserna och ekvationerna ovan är systemets *tillståndsmodell*, dvs de beskriver systemet på *tillståndsform*.

Generell form för enkelvariabla system

- Ovanstående exempel kan generaliseras och matrisekvationerna ser då ut så här:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \cdot u$$

- Matrisen **A** kallas *systemmatris*, **B** *insignalmatris*, **C** *utsignalmatris* och **D** *direktmatris*.

Direktmatris saknas normalt

- Direktmatrisen, $\mathbf{D}$, motsvarar en koppling direkt från insignal till utsignal, vilket är extremt ovanligt för de processer vi kan tänkas reglera. Denna matris är därför i princip alltid 0, sådana system kallas *strikt propria*.

Generell form för flervariabla system

- System med mer än en in- och utgång kan beskrivas på samma sätt. Insignalmatrisen måste då ha lika många kolumner som det finns ingångar och utsignalmatrisen lika många rader som det finns utgångar:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Ovanstående system har n tillståndsvariabler, p insignaler och q utsignaler.

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller**
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Val av tillståndsvariabler

- Kravet när vi väljer tillståndsvariabler är, som tidigare nämnts, att de till fullo beskriver systemet.
- Det finns normalt olika uppsättningar tillståndsvariabler som alla uppfyller det kravet.
- En vanlig metod när vi med hjälp av naturlagar ställer upp en modell av ett fysiskt system, är att låta tillståndsvariablerna representera olika energier (rörelseenergi, lägesenergi, elektrisk energi osv).

Tillståndsmodell för ett nivåsystem

- Systemet består av tre vattentankar, en bild finns på sid 267.
- Vi antar att ventilerna i utfödena är lineära, dvs att flödet genom ventilen är proportionellt mot nivån i tanken ovanför ventilen,
 $v_i = k_i \cdot h_i$
- För varje behållare gäller då ekvationen $A_i \frac{dh_i}{dt} = u_{in}^i - u_{ut}^i$, där A_i är bottenarean av tank i , h_i är vätskenivån i tank i , u_{in}^i är inflödet till tank i och u_{ut}^i är utflödet från tank i .
- Detta ger följande tre ekvationer:

$$\begin{cases} A_1 \frac{dh_1}{dt} = u_1 - v_1 = u_1 - k_1 \cdot h_1 \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = u_2 - v_2 = u_2 - k_2 \cdot h_2 \\ A_3 \frac{dh_3}{dt} = v_1 + v_2 - v = k_1 \cdot h_1 + k_2 \cdot h_2 - v \end{cases}$$

Tillståndsmodell för ett nivåsystem, forts

- På matrisform blir detta:

$$\begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{A_2} & 0 \\ \frac{k_1}{A_3} & \frac{k_2}{A_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix}$$

- Förutsatt att utsignalen är h_3 får vi följande (triviala) ekvation för utsignalen.

$$\begin{bmatrix} h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Tillståndsmodell för ett system beskrivet med blockschema

- Systemet visas i bilden på sid 270.
- Här finns ingen fysikalisk betydelse av systemet, så vi kan inte välja energinivåer som tillståndsvariabler. Vi väljer istället utsignalerna från de tre blocken, dvs signalerna x_1, x_2, x_3 . Detta val är bra eftersom överföringsfunktionerna för blocken enkelt visar hur en tillståndsvariabels derivata beror av de tre variablerna.
- Detta ger följande tre ekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 4u \\ x_2' = -0.2x_2 + 0.2v \\ x_3' = -4x_3 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

Tillståndsmodell för ett system beskrivet med blockschema, forts

- På matrisform blir detta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller**
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Fördelar med tillståndsmodeller

- Om den reglerade processen beskrivs av ett system av första ordningens differentialekvationer, som var fallet med nivåsystemet ovan, är det ganska rättframt att ställa upp en tillståndsmodell. Om vi inte ska ha en tillståndsmodell måste vi utföra algebraiska beräkningar för att eliminera variabler och slå ihop differentialekvationerna.
- Om den reglerade processen har mer än en in- och/eller utsignal (kallas *MIMO-system*, **M**ultiple **I**ntput **M**ultiple **O**utput) är tillståndsmodeller enklare eftersom de kan ha godtyckligt antal in/ut-signaler utan att beräkningarna blir svårare. Använder vi istället överföringsfunktioner blir MIMO-system snart mycket komplexa.

Fördelar med tillståndsmodeller, forts

- Det finns mer avancerade algoritmer för dimensionering av regulatorer med tillståndsmodeller än med överföringsfunktioner. Dessa algoritmer ingår dock inte i kursen.
- Det är lätt att simulera system som är beskrivna på tillståndsform.

Nackdelar med tillståndsmodeller

- Tillståndsmodeller är onödigt komplexa för enkla system.
- Blockscheman ger en tydligare bild av systemet med överföringsfunktioner än med tillståndsmodeller.

Övningsuppgifter

- 14.4a-b, 14.5, 14.6a, 14.7, 14.8a

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde**
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Att beräkna stationärvärdet av ett tillståndssystem

- Stationärvärdet (slutvärdet, steady state value) av ett tillståndssystem beräknas genom att sätta tillståndsvariablernas derivator lika med noll. Eftersom tillståndsvariablerna inte ändrar värde i stationärt tillstånd måste deras derivator då vara noll.
- Som ett exempel betraktar vi nedanstående tillståndsmodell.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Att beräkna stationärvärdet av ett tillståndssystem, forts

- Låt oss bestämma stationärvärdet då insignalen är ett enhetssteg, dvs $u = 1$. Först sätter vi derivatorna lika med noll.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1$$

- Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = 2x_2 + 4 \\ 0 = 2x_1 + 5x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Att beräkna stationärvärdet av ett tillståndssystem, forts

- Nu vet vi att i stationärt tillstånd gäller att $x_1 = 5$ och $x_2 = -2$. Då kan vi beräkna utsignalen, y :

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = 10 - 2 = 8$$

Övningsuppgifter

- 14.8b, 14.12b, 14.13b

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell**
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Att transformera överföringsfunktion till tillståndsmodell

- Om överföringsfunktionen redan är känd behöver vi inte ta fram tillståndsmodellen utifrån fysikaliska samband, det räcker att transformera överföringsfunktionen.
- Vi ska titta på tre olika sätt att transformera en överföringsfunktion till en tillståndsmodell.

Metoder att transformera överföringsfunktion till tillståndsmodell

Diagonalform Lätt att förstå men kräver att alla poler är kända och fungerar dessutom endast för reella enkelpoler.

Styrbar kanonisk form Lättare att ta fram än diagonalform. Fungerar för både komplexa och reella poler och kräver inte att polerna är kända. System beskrivna på denna form är *styrbara*, vilket innebär att för alla tillåtna tillstånd går det att beräkna en sekvens av insignaler som försätter systemet i just det tillståndet.

Observerbar kanonisk form Samma egenskaper som styrbar kanonisk form, men denna form gör inte systemet styrbart utan istället *observerbart*, vilket innebär att värdet av alla tillståndsvariabler går att beräkna om systemets utsignal är känd.

Diagonalform

- Vi har följande överföringsfunktion.

$$\frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- Om systemet endast har reella enkelpoler kan överföringsfunktionen partialbråksuppdelas på nedanstående form.

$$\frac{\beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\beta_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n}$$

- Detta motsvarar ett blockschema med n parallellkopplade block enligt bilden på sid 273.

Diagonalform, forts

- Nu kan vi använda utsignalerna från blocken som tillståndsvariabler för att beskriva systemet på tillståndsform:

$$\frac{X_1}{U} = \frac{\beta_1}{s - \lambda_1}; \quad X_1(s - \lambda_1) = \beta_1 U; \quad x'_1 = \lambda_1 x_1 + \beta_1 U$$

$$\frac{X_2}{U} = \frac{\beta_2}{s - \lambda_2}; \quad X_2(s - \lambda_2) = \beta_2 U; \quad x'_2 = \lambda_2 x_2 + \beta_2 U$$

$\vdots$

$$\frac{X_n}{U} = \frac{\beta_n}{s - \lambda_n}; \quad X_n(s - \lambda_n) = \beta_n U; \quad x'_n = \lambda_n x_n + \beta_n U$$

Diagonalform, forts

- Skriver vi detta på matrisform får vi nedanstående ekvationer, vilka beskriver systemet på diagonalform.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Styrbar kanonisk form

- Vi har följande överföringsfunktion.

$$\frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- På styrbar kanonisk form blir detta:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Observerbar kanonisk form

- Vi har följande överföringsfunktion.

$$\frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

- På observerbar kanonisk form blir detta:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Övningsuppgifter

- 14.1a-b, 14.2b-c

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion**
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Att transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion

- Vi utgår från systemet på tillståndsform:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

- Laplacetransform ger:

$$\begin{cases} s\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U \\ Y = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases}$$

- Eftersom $\mathbf{X}$ är en vektor gäller att $\mathbf{X} = \mathbf{I}\mathbf{X}$, där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen med samma dimension som vektorn $\mathbf{X}$:

$$s\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; s\mathbf{I}\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{B}U; \mathbf{X} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U$$

Att transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion, forts

- Sätter vi in föregående ekvation i ekvationen $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ får vi:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}$$

- Överföringsfunktionen $\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{U}}$ är alltså:

$$G(s) = \mathbf{C}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler**
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling

Att transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion, forts

- Som vi nyss sett är överföringsfunktionen för en tillståndsmodell:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- Systemets poler är som bekant nollställena för överföringsfunktionens nämnare. Eftersom invertering av en matris ger en nämnare som är lika med matrisens determinant, ges polerna för en tillståndsmodell av ekvationen:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Övningsuppgifter

- 14.3a, 14.14a

Innehåll

- 1 Kapitel 14.1 Introduktion till tillståndsmodeller
- 2 Kapitel 14.2-14.3 Några exempel på tillståndsmodeller
- 3 Kapitel 14.4 För- och nackdelar med tillståndsmodeller
- 4 Stationärvärde
- 5 Kapitel 14.5 Från överföringsfunktion till tillståndsmodell
- 6 Kapitel 14.6 Från tillståndsmodell till överföringsfunktion
- 7 Kapitel 14.6 Tillståndsmodellens poler
- 8 Kapitel 14.10 Tillståndsåterkoppling**

Reglering av tillståndsmodell

- Att beskriva ett system på tillståndsmodell gör det möjligt att använda fler olika reglermetoder som är mer avancerade än vad vi sett hittills. I den här kursen ska vi dock bara titta kortfattat på en grundläggande metod, *tillståndsåterkoppling*, vilken går ut på att använda tillståndsvariablerna som indata till regulatorn.

Tillståndsåterkoppling med hjälp av polplacering

Vid tillståndsåterkoppling beräknas styrsignalen, u som en lineärkombination av tillståndsvariablerna, x . Om vi utgår från blockschemat på sid 288 och systemet

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

kommer styrsignalen att beräknas enligt:

$$u = -l_1 x_1 - l_2 x_2 - \dots - l_n x_n + K_r r = -Lx + K_r r$$

där $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$ kallas styrlagsvektorn, förstärkningen K_r kallas börvärdesfaktorn och r är börvärdet.

Tillståndsåterkoppling med hjälp av polplacering, forts

Om vi sätter in ovanstående uttryck för u i tillståndsekvationerna får vi nedanstående tillståndsmodell.

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{L}\mathbf{x} + K_r r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x} + \mathbf{B}K_r r \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

vilket innebär att vi har samma tillståndsvariabler som i det ursprungliga systemet men att börvärdet är insignal i stället för som tidigare styrsignalen. Dessutom har systemmatrisen ändrats till $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$

Tillståndsåterkoppling med hjälp av polplacering, forts

- Dimesioneringen av regulatorn handlar om att bestämma styrlagsvektorn L och börvärdesfaktorn K_r . Detta kan göras med hjälp av polplacering.
- Polplacering handlar som bekant om att bestämma var polerna ska ligga, ta fram ett karakteristiskt polynom, $P(s)$, som placerar polerna som önskat samt slutligen bestämma faktorerna i styrlagsvektorn så att överföringsfunktionens nämnare får det önskade utseendet, dvs $P(s)$. Detta innebär att styrlagsvektorn bestäms av

$$\det(sI - \mathbf{A}') = \det(sI - \mathbf{A} + \mathbf{B}L) = P(s)$$

Tillståndsåterkoppling med hjälp av polplacering, forts

- När vi tagit fram styrlagsvektorn återstår att bestämma börvärdesfaktorn, K_r , så att lågfrekvensförstärkningen blir 1, vilket eliminerar kvarstående fel till följd av börvärdesändringar (men tyvärr inte till följd av störningar).
- För att beräkna lågfrekvensförstärkningen sätter vi $s = 0$ i överföringsfunktionen. Om lågfrekvensförstärkningen är 1 gäller:

$$G(0) = C(0 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L})^{-1} \mathbf{B}K_r = C(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L})^{-1} \mathbf{B}K_r = 1$$

$$\Rightarrow K_r = \frac{1}{C(-\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{L})^{-1} \mathbf{B}}$$

Övningsuppgifter

● 14.16