

1.

a) Laplacetransformation av $\ddot{y} + 3\dot{y} = u$ ger

$$s^2Y(s) + 3sY(s) = U(s) \Leftrightarrow s(s+3)Y(s) = U(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+3)}U(s)$$

Överföringsfunktionen från u till y ges alltså av $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$.

b)

$$Y(s) = GU(s) = G(s)K(R(s) - Y(s)) \Leftrightarrow (1 + GK)Y(s) = G(s)KR(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K}R(s) = \frac{K}{s(s+3) + K}R(s)$$

Överföringsfunktionen från r till y ges alltså av $G_c(s) = \frac{K}{s(s+3)+K}$

c) Det återkopplade systemet har två poler men inga nollställen.

d) Det återkopplade systemet är stabilt om polerna ligger i vänster halvplan.

Poler: $s(s+3) + K = 0 \Leftrightarrow s^2 + 3s + K = 0$ ligger i vänster halvplan om alla koefficienter i andragsgradspolynomet är positiva. Alltså stabilt för $K > 0$.

e) Statisk förstärkning för återkopplade systemet ges av $G_c(0) = 1$.

f) Se figur 5.1 i kursboken.

g) Skärfrekvens ω_c där $G(\omega_c) = 1 (= 10^0)$. Från figur utläses att $\omega_c \approx 2.1$ rad/s.

h) Fasmarginal $\varphi_m = 180^\circ + \arg(G(\omega_c)) \approx 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

i) Stigtid beräknas som tiden från 10% till 90% av slutvärdet. Bli ungefär $0.75 - 0.2 = 0.55$ s.

j) Översläng ungefär: $1.15 - 1 = 0.15 = 15\%$.

2.

a) Ett möjligt reglerproblem är att få temperaturen i ugnen att följa en önskad temperatur. Förslag på signaler: Insignal - pålagd spänning eller ström i värmeelementet. Utsignal - temperaturen i ugnen. Referenssignal - önskad temperatur i ugnen (från vred). Stör signaler - temperatur utanför ugnen, ugnsluckan öppen eller stängd, temperatur och massa på maten i ugnen.

b) Vi har följande samband mellan signalerna:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s}(-aX_1(s) + X_2(s) + bU(s)) \\ X_2(s) &= \frac{1}{s}X_1(s). \end{aligned}$$

Multiplicera båda sidor med s och återtransformera ger:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + x_2 + bu \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ y &= cx_1 \end{aligned}$$

c) Nyquistkurvan börjar vid frekvensen $\omega = 0$ där $|G(0)| = \infty$ och $\arg G(0) = -90^\circ$. Kurvan skär enhetscirkeln vid $\omega_c \approx 1$ och där är $|G(j1)| = 1$ och $\arg G(j1) = -135^\circ$. När $\omega \rightarrow \infty$ är $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0$ och den går mot noll från -180° . Nyquistkurvan ser alltså ut ungefär som i figuren nedan:

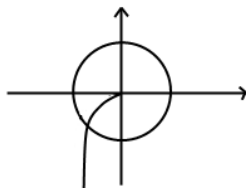


Figure 1: Nyquistkurva för uppgift 2c.

3.

- a) Snabba upp med 70% betyder att skärfrekvensen ska ökas med 70% jämfört med P-regulatorn. Samma översläng innebär att vi ska ha ungefär samma fasmarginal som med P-regulatorn. Statiska felet elimineras om kretsförstärkningen är oändligt stor vid frekvensen $\omega = 0$.
- b) För att uppnå detta kan vi använda en lead-lag regulator på formen $F(s) = K \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$. β väljs så att fasmarginalen i den önskade skärfrekvensen blir samma som med P-regulatorn $+7^\circ$ (för lag-länken). τ_D och τ_I enligt tumreglerna. För att eliminera statiskt fel måste vi välja $\gamma = 0$. Slutligen väljs K så att skärfrekvensen blir den önskade.
- c) Tre regulatorer L1-L3 har oändlig statisk förstärkning och motsvarande stegsvar ska alltså inte ha något statiskt fel. Alltså hör L1-L3 ihop med Y1,Y2,Y3. Uteslutning ger **L4-Y4**.
L3 har lägst fasmarginal och borde därför svänga mest: **L3-Y1** .
L2 har högst skärfrekvens av kvarvarande och borde vara snabbast: **L2-Y2**.
L1 har lägst skärfrekvens och borde därför vara långsammast: **L1-Y3**.

4.

- a) One obtains the following output equation from the block diagram given:

$$\begin{aligned} Z &= (F(R - Z - N) + HR)G + V, \\ Z &= (F + H)GR - FGZ - FGN + V, \\ Z(1 + FG) &= (F + H)GR - FGN + V, \\ Z &= \left[\frac{FG}{1 + FG} + \frac{HG}{1 + FG} \right] R - \frac{FG}{1 + FG} N + \frac{1}{1 + FG} V. \end{aligned}$$

For the given alternatives, one obtains the following output equations:

$$Z = \begin{cases} \frac{4}{s+4} R - \frac{4}{s+4} N + \frac{s}{s+4} V, & \text{Alt 1,} \\ \frac{4}{s+4} R - \frac{2}{s+2} N + \frac{s}{s+2} V, & \text{Alt 2,} \\ \frac{4}{s+4} R - 0 N + V, & \text{Alt 3.} \end{cases}$$

As can be observed from the above relations and (co-)sensitivity plots given in Fig. 2, among all the alternatives,

- All of them are the same in reference, r , tracking,
- Alt. 1 is better in suppressing low-frequency output disturbance, v , signals,
- Alt. 3 is better in suppressing measurement error, n , signals,
- The original design already gives a good balance between S and T and since $F(s)$ is unchanged in Alt 2, also S and T will be unchanged. Alt 1 gives better rejection of output disturbances, but worse suppression of measurement errors. Please observe that the last alternative, Alt. 3, is not capable of suppressing any part of the output disturbance signal, v .

b) Since the sensitivity and complementary sensitivity transfer functions add up to 1, i.e. $S+T = 1$, one cannot improve both the output disturbance *and* measurement error suppression *at the same time*.

5.

a) For the observer, it is required to have $\det(sI - A + KC_2) = (s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j) = s^2 + 4s + 4 - (-4) = s^2 + 4s + 8$. If we solve for the equation, we obtain:

$$\begin{aligned} \det(sI - A + KC_2) &= s^2 + 4s + 8, \\ \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_1 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \right| &= s^2 + 4s + 8, \\ \left| \begin{bmatrix} s+1 & K_1-0.5 \\ -1 & s+K_2 \end{bmatrix} \right| &= s^2 + 4s + 8, \\ s^2 + (1+K_2)s + (K_1+K_2-0.5) &= s^2 + 4s + 8, \end{aligned}$$

which gives $K_1 = 5.5$ and $K_2 = 3$.

b) Carrying out the calculations, one obtains:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bl_0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}, \\ z &= [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

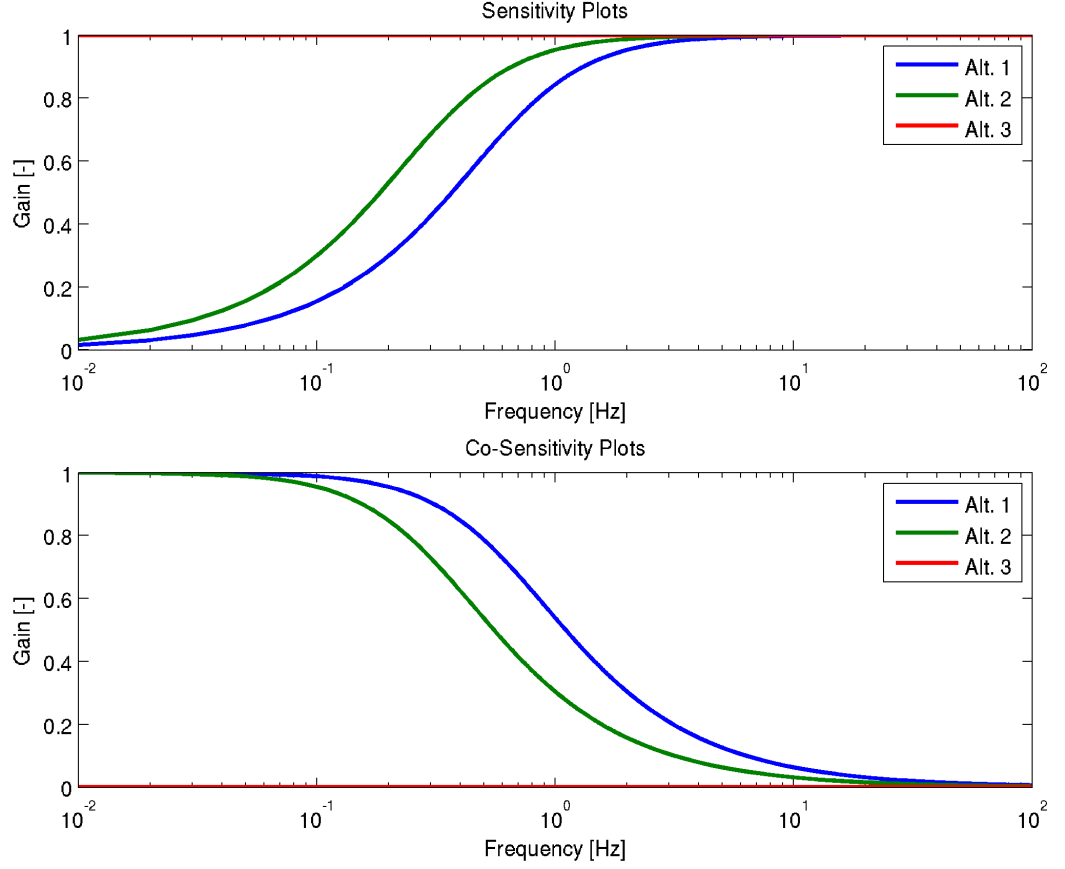


Figure 2: (Co-)sensitivity plots for different alternatives.

which, in steady state (i.e. $d\bar{x}/dt = 0$) yields:

$$z = - [C_1 \ 0] \begin{bmatrix} A - BL & BL \\ 0 & A - KC_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Bl_0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ n \end{bmatrix}.$$

As a result, the output equation will give:

$$z = \frac{8}{32}r + \frac{13}{32}n.$$

Thus, the steady-state gain from n to z is equal to $13/32$.

- c) If the given system is augmented with n as the third state, the following state equations will be obtained:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_2 \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ n \end{bmatrix},\end{aligned}$$

from which one can verify that the *new* observability matrix is *still* full rank:

$$\det(\mathcal{O}) = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \right| = 1 \times (-1)^{1+3} \times 0.5 = 0.5 \neq 0.$$

This means that we can make an observer that estimates x and n without steady-state error.

- d) In steady state we will have $\hat{x} \rightarrow x$ even when we have the measurement error n and since the control law $u = -Lx + l_o r$ gives unit steady-state gain, we will have that also when using \hat{x} in the feedback.