Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning 2, 2014-03-14, kl. 08.00 – 13.00.

SF1663 Tillämpad linjär algebra med numeriska metoder, för CFATE.

Examinator: Lars Filipsson

Inga hjälpmedel!

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Betygsgränser vid denna tentamen är

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

1. I rummet $\mathbf{R}^3$ har vi punkterna $P = (-3, -1, 4)$ och $Q = (2, 3, 3)$, samt linjen L_1 som ges av parameterformen $(\frac{3}{2}t, \frac{1}{2}t, -2t)$, där t är parameter.
   a) Bestäm parameterformen för linjen L_2 som går genom punkterna P och Q. (1 p)
   b) Linjerna L_1 och L_2 har en gemensam punkt. Bestäm denna skärningspunkt. (1 p)
   c) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller L_1 och L_2. (2 p)

2. a) Bestäm ett andragradspolynom $p(x) = a + bx + cx^2$ vars graf går genom punkterna $(-1, 4)$, $(1, 2)$ och $(2, 7)$. (2 p)
   b) Skriv ett Matlab-program som löser uppgift a och skriver ut a, b och c som svar. (2 p)

3. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ är bestämd av

$$T(1, 3) = (1, 0) \quad \text{och} \quad T(-2, -4) = (0, 1).$$

   Enhetskvadraten Ω har hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$, och avbildas med T på ett parallellogram $T(\Omega)$.
   a) Bestäm matrisen för avbildningen T. (1 p)
   b) Visa att bildrummet till T är hela $\mathbf{R}^2$. (1 p)
   c) Rita upp $T(\Omega)$, och bestäm dess area. (2 p)

V.g. vänd!

4. Följande tre vektorer i $\mathbf{R}^4$,

$$\boldsymbol{u} = (1, 1, 0, 1), \quad \boldsymbol{v} = (1, -1, 1, 0) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{w} = (1, 1, 0, -2),$$

är ortogonala. Vi låter V vara deras linjära hölje, $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$.

a) Bestäm en ON-bas för V. (1 p)

b) Bestäm projektionen av vektorn $(0, -2, 1, 8)$ på delrummet V. (2 p)

c) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ vars nollrum är V. (1 p)

5. Planet W i $\mathbf{R}^3$ är alla vektorer på formen $(t, 2t-2s, 2t+2s)$, där s och t är reella tal.

a) Bestäm ett linjärt ekvationssystem som har W som lösningsmängd. (2 p)

b) Bestäm alla vektorer i W som har längd 1 och som är ortogonala mot vektorn $(1, 1, 1)$. (2 p)

6. En linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ har egenvärdena -1, 0, 1 och 2. Visa att det finns ett (tvådimensionellt) plan V i $\mathbf{R}^4$ där alla vektorer avbildas på sig själva av T^2. (4 p)

7. I $\mathbf{R}^4$ har vi vektorerna

$$\boldsymbol{e} = (5, 9, 2, 5), \quad \boldsymbol{f} = (5, 8, 4, 5), \quad \boldsymbol{x} = (1, 1, 2, 1) \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = (1, 2, 0, 1).$$

Vi har en bas $B = \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}$ för ett delrum V av $\boldsymbol{R}^4$, och $L\colon V \to V$ är en linjär avbildning. Vi vet att i basen B så har avbildningen L matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

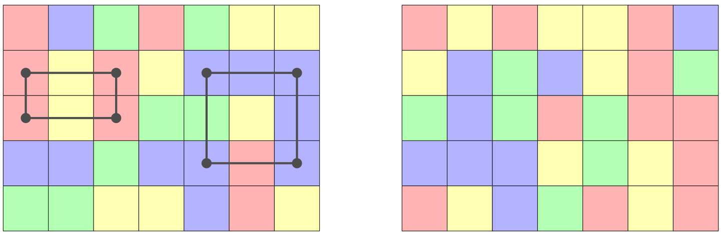
a) Bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{x}$ med avseende på basen B. (1 p)

b) Bestäm basbytesmatrisen från basen B till basen $B' = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. (2 p)

c) Bestäm egenvektorerna för L. (1 p)

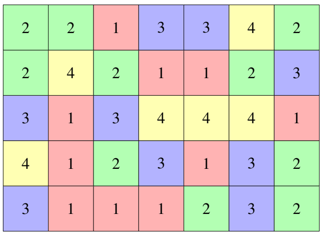
8. Mittpunkterna på sidorna i en triangel är $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 1)$ och $(-3, 2, 3)$. Bestäm triangelns hörn. (4 p)

9. Frida ska lägga klinkers på sitt rektangulära köksgolv och hon har plattor med fyra olika färger. Av estetiska skäl vill hon lägga plattorna i ett sådant mönster att om fyra plattor bildar hörnen i en rektangel, med kanter parallella med golvets kanter, så ska de plattorna inte alla ha samma färg.



Figur 1. Plattmönstret till vänster är inte ok eftersom de markerade rektanglarna har hörnplattor med samma färg. Däremot saknar mönstret till höger sådana rektanglar och är därmed ok.

Ett plattmönster kan skrivas upp som en matris genom att de fyra färgerna ges en siffra från 1 till 4.



$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Figur 2. Varje färg ges en siffra och därmed kan ett mönster skrivas som en matris.

Din uppgift är att skriva en Matlab-funktion `valid_pattern(X)` som tar en plattmönstermatris `X` av godtycklig storlek som argument, och returnerar `true` om färgmönstret som `X` beskriver uppfyller Fridas krav, annars ska `false` returneras. (4 p)