KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Måndagen den 17 mars, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$.
   (a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ i den riktning som ges av vektorn $(4, 3)$. **(2 p)**
   (b) Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ antar värdet -5? **(2 p)**

2. Visa att $(1, -1)$ är en stationär punkt till funktionen $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ. **(4 p)**

3. Beräkna volymen av det område som är under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och ovanför det område i xy-planet som bestäms av olikheterna $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$. **(4 p)**

DEL B

4. (a) Formulera Greens formel. Ange alla förutsättningar. **(1 p)**

   (b) Använd Greens formel för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_\gamma (x - y^2)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy$$

   där γ är den kurva som sammansätts av parabeln $y = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till punkten $(1, 1)$ och den räta linjen därifrån tillbaka till punkten $(-1, 1)$. **(3 p)**

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = x(y-1)$ antar i det område som ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$. **(4 p)**

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$ ned genom konytan som beskrivs av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Betrakta ekvationen

$$x^y + y = 3$$

i området $x, y > 0$. Visa att i en omgivning av punkten $(1, 2)$ så definierar denna ekvation y som en funktion av x, alltså $y = f(x)$. Beräkna också $f'(1)$. **(4 p)**

8. Halvklotet K: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, där R är given har masstätheten

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0 c_0 z}{\left(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2)\right)^{3/2}}$$

där ρ_0 (kg/m^3) och c_0 (m^{-1}) är fysikaliska konstanter (x, y, z i m). Ge en formel för halvklotets massa. **(4 p)**

9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dxdy$$

där D är det område i första kvadranten i xy-planet som begränsas av kurvorna

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

(4 p)