



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Lösningsförslag till tentamen 2014-03-17**

---

DEL A

1. Betrakta funktionen  $f(x, y) = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$ .

(a) Beräkna riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $(1, 2)$  i den riktning som ges av vektorn  $(4, 3)$ . **(2 p)**

(b) Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan av  $f$  i punkten  $(1, 2)$  antar värdet  $-5$ ? **(2 p)**

*Lösning.* (a) Riktningsderivatan ges av  $f'_\vec{v} = \nabla f \cdot \vec{v}$ , där  $\|\vec{v}\| = 1$ . Vi har  $\vec{v} = \frac{1}{5}(4, 3)$  och

$$\nabla f = \left( -\frac{x}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}} \right).$$

I punkten  $(1, 2)$  är  $\nabla f = (-1, -4)$  vilket medför att

$$f'_\vec{v} = (-1, -4) \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = -\frac{16}{5}.$$

(b) Låt  $\alpha$  vara vinkeln mellan  $\nabla f$  och  $\vec{v}$ , så att

$$f'_\vec{v} = \nabla f \cdot \vec{v} = \|\nabla f\| \cdot 1 \cdot \cos \alpha.$$

Eftersom  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  får vi

$$-\|\nabla f\| \leq f'_\vec{v} \leq \|\nabla f\|.$$

I punkten  $(1, 2)$  är  $\|\nabla f\| = \sqrt{17}$ . Eftersom  $-5 < -\sqrt{17}$  antas inte värdet  $-5$  för någon riktning.

□

2. Visa att  $(1, -1)$  är en stationär punkt till funktionen  $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$  och avgör dess typ. **(4 p)**

*Lösning.* Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Genom insättning ser vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 0$$

vilket visar att  $(1, -1)$  är en stationär punkt.

För att avgöra vilken typ av stationär punkt det är betraktar vi den kvadratiske formen

$$Q(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)h_2^2$$

i punkten  $(a, b) = (1, -1)$ . Vi har att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

så

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = 2.$$

Den kvadratiske formen  $Q$  blir alltså

$$Q(h_1, h_2) = 8h_1h_2 + 2h_2^2,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1, h_2) = 2(h_2 + 2h_1)^2 - 8h_1^2.$$

Detta är en indefinit kvadratisk form, och vi drar slutsatsen att punkten  $(1, -1)$  är en sadelpunkt.  $\square$

3. Beräkna volymen av det område som är under paraboloiden  $z = 1 - x^2 - y^2$  och ovanför det område i  $xy$ -planet som bestäms av olikheterna  $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$ . **(4 p)**

*Lösning.* Paraboloiden skär  $xy$ -planet då  $z = 0$ , skärningskurvan är alltså cirkeln  $x^2 + y^2 = 1$ .

Volymen ges av

$$V = \iint_D (1 - (x^2 + y^2)) \, dx dy$$

Där  $D$  är den cirkelsektor i högra halvplanet som begränsas av linjerna  $y = -x$  och  $y = \sqrt{3}x$  samt cirkeln  $x^2 + y^2 = 1$ .

Låt  $\alpha$  vara vinkeln mellan  $x$ -axeln och linjen  $y = \sqrt{3}x$ . Då gäller att  $\tan \alpha = \sqrt{3}$  så  $\alpha = \pi/3$ . Vinkeln mellan  $x$ -axeln och linjen  $y = -x$  är  $-\pi/4$ .

Med polära koordinater  $r$  och  $\phi$  får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \left( \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \right) d\phi \\ &= \left( \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{7\pi}{48}. \end{aligned}$$

□

## DEL B

4. (a) Formulera Greens formel. Ange alla förutsättningar. (1 p)

- (b) Använd Greens formel för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$$

där  $\gamma$  är den kurva som sammansätts av parabeln  $y = x^2$  från punkten  $(-1, 1)$  till punkten  $(1, 1)$  och den rätta linjen därifrån tillbaka till punkten  $(-1, 1)$ . (3 p)

*Lösning.* (a) Se kursboken sidan 335.

- (b) Vi har

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} (x - y^2) = -2y.$$

Greens formel ger alltså att

$$\oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = \iint_D 2(x + y) dx dy$$

där  $D$  är området i  $xy$ -planet som beskrivs av  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $x^2 \leq y \leq 1$ . På grund av symmetri är  $\iint_D 2x dx dy = 0$ , så vi får att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy &= \iint_D 2y dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 2y dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( [y^2]_{x^2}^1 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= \left[ x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

□

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen  $f(x, y) = x(y-1)$  antar i det område som ges av  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ . (4 p)

*Lösning.* Eftersom funktionen  $f$  är ett polynom är den en kontinuerlig funktion och eftersom dessutom området är kompakt (slutet och begränsat) vet vi att största och minsta värde antas i en av följande punkter:

- (a) inre stationära punkter,
- (b) randpunkter som uppfyller Lagrangevillkoret,
- (c) singulära randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

- (a) I en stationär punkt är

$$\nabla f = (y-1, x) = (0, 0).$$

Vi ser att detta bara inträffar då  $(x, y) = (0, 1)$ , vilket är en punkt på randen och inte i det inre till området.

- (b) De två randcirkelnarna till området kan skrivas som

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \text{resp.} \quad g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0,$$

och Lagrangevillkoret är uppfyllt i punkter där  $\nabla f$  är parallell med  $\nabla g_1$  resp.  $\nabla g_2$ . Detta kan vi uttrycka med villkoret

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} -\nabla f & - \\ -\nabla g_i & - \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= 2y(y-1) - 2x^2 \\ &= 2(y^2 - x^2 - y). \end{aligned}$$

På den inre randcirkeln har vi  $x^2 = 1 - y^2$ . Detta insatt i Lagrangevillkoret  $y^2 - x^2 - y = 0$  ger

$$y^2 - (1 - y^2) - y = 2y^2 - y - 1 = 0$$

vilket har lösningarna  $y = -1/2$  och  $y = 1$ . Vi får alltså tre punkter  $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$ ,  $(0, 1)$  på den inre randcirkeln.

På den yttre randcirkeln är  $x^2 = 3 - y^2$ , och detta ger

$$y^2 - (3 - y^2) - y = 2y^2 - y - 3 = 0.$$

Vi hittar lösningarna  $y = -1$  och  $y = 3/2$  vilket ger fyra punkter  $(\pm\sqrt{2}, -1)$ ,  $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$ .

- (c) En punkt på randkurvan  $g_1 = 0$  är en singulär punkt om  $\nabla g_i = 0$ . Eftersom  $\nabla g_i = (2x, 2y)$  ser vi att detta bara inträffar i origo, som inte ligger på randen.

Funktionen antar alltså sitt största och minsta värde i någon av punkterna  $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\pm\sqrt{2}, -1)$ ,  $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$ . Eftersom

$$f(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = \mp 3\sqrt{3}/4$$

$$f(0, 1) = 0,$$

$$f(\pm\sqrt{2}, -1) = \mp 2\sqrt{2},$$

$$f(\pm\sqrt{3}/2, 3/2) = \pm\sqrt{3}/4$$

så drar vi slutsatsen att

- största värde är  $2\sqrt{2}$  och antas i punkten  $(-\sqrt{2}, -1)$ ,
- minsta värde är  $-2\sqrt{2}$  och antas i punkten  $(\sqrt{2}, -1)$ .

□

6. Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$  ned genom konytan som beskrivs av  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . (4 p)

*Lösning. Alternativ 1:* Vi parametriserar konytan genom  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  där  $(x, y)$  ligger i cirkelskivan  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Då är

$$\hat{N} dS = \pm (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy = \pm \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy$$

där tecknet  $\pm$  bestäms av ytans orientering. Eftersom vi ska beräkna flödet ner genom ytan ska vi ha en normalvektor med negativ  $z$ -komponent, så vi väljer alltså

$$\begin{aligned} \hat{N} dS &= - \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy. \end{aligned}$$

I parametriseringen blir vektorfältet  $\mathbf{F} = (-y, x, z^2) = (-y, x, x^2 + y^2)$  och

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= (-y, x, x^2 + y^2) \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy \\ &= \left( -\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2 - y^2 \right) dx dy \\ &= -(x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Vi får alltså att flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= - \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^3 dr \right) d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{4} \right) d\phi \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Alternativ 2:** Vi vill beräkna flödet genom att använda divergenssatsen och slutar därför till konytan  $S$  genom att lägga till cirkelskivan  $S_1$  som beskrivs av  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z = 1$ .

Divergensen av vektorfältet  $\mathbf{F}$  är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 0 + 0 + 2z = 2z.$$

Divergenssatsen ger att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_K 2z \, dxdydz$$

där  $K$  är det inneslutna området.

Volymsintegralen blir

$$\iiint_K 2z \, dxdydz = \iint_D \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z \, dz \right) dxdy = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dxdy$$

där  $D$  är områdets projektion på cirkelskivan, dvs. cirkelskivan  $x^2 + y^2 \leq 1$ . I polära koordinater blir denna integral

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \right) d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Vi beräknar nu flödet genom ytan  $S_1$  där  $\hat{N} = (0, 0, 1)$ . Detta flöde ges av

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{S_1} (-y, x, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_{S_1} dS = \pi.$$

Slutligen får vi

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

□

## DEL C

## 7. Betrakta ekvationen

$$x^y + y = 3$$

i området  $x, y > 0$ . Visa att i en omgivning av punkten  $(1, 2)$  så definierar denna ekvation  $y$  som en funktion av  $x$ , alltså  $y = f(x)$ . Beräkna också  $f'(1)$ . **(4 p)**

*Lösning.* Sätt  $F(x, y) = x^y + y$ . Då är  $F(1, 2) = 3$  så  $(1, 2)$  uppfyller ekvationen och  $F$  är en  $C^1$ -funktion i en omgivning av  $(1, 2)$ . Vidare är

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{y \ln x} + y) = \ln x e^{y \ln x} + 1 = \ln x x^y + 1$$

så

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = (\ln 1) \cdot 1^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen säger oss nu att det finns en öppen omgivning  $U$  av  $(1, 2)$  där sambandet  $F(x, y) = x^y + y = 3$  definierar  $y$  som en funktion av  $x$ ,  $y = f(x)$ , där  $f$  är en  $C^1$ -funktion.

Derivering av identiteten

$$x^{f(x)} + f(x) = e^{f(x) \ln x} + f(x) = 3$$

ger

$$\left( f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x} \right) x^{f(x)} + f'(x) = 0$$

Sätter vi in  $x = 1$  och  $f(1) = 2$  får vi

$$\left( f'(1) \cdot 0 + f(1) \frac{1}{1} \right) 1^{f(1)} + f'(1) = \left( f'(1) \cdot 0 + 2 \frac{1}{1} \right) 1^2 + f'(1) = 2 + f'(1) = 0.$$

Alltså är  $f'(1) = -2$ . □

8. Halvklotet  $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ , där  $R$  är given har masstätheten

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0 c_0 z}{(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2))^{3/2}}$$

där  $\rho_0$  (kg/m<sup>3</sup>) och  $c_0$  (m<sup>-1</sup>) är fysikaliska konstanter ( $x, y, z$  i m). Ge en formel för halvklotets massa. **(4 p)**

*Lösning.* Klotets massa ges av integralen

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K \frac{\rho_0 c_0 z}{(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2))^{3/2}} dx dy dz.$$

För att beräkna denna byter vi till rymdpolära koordinater. Då är  $z = r \cos \theta$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq r \leq R$ , och Jacobianen är  $r^2 \sin \theta$ . Vi får

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_0^R \frac{\rho_0 c_0 r \cos \theta}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi \rho_0 c_0 \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \left( \int_0^R \frac{r^3}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} dr \right). \end{aligned}$$

Här är

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Variabelbytet  $1 + c_0^2 r^2 = t$  ger  $r^2 = c_0^{-2}(t - 1)$  och  $r dr = 2^{-1} c_0^{-2} dt$ , så

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{r^3}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} dr &= \int_1^{1+c_0^2 R^2} \frac{c_0^{-2}(t-1)}{t^{3/2}} 2^{-1} c_0^{-2} dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \int_1^{1+c_0^2 R^2} \left( \frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{t^{3/2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \left[ \frac{t^{1/2}}{1/2} - \frac{t^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{1+c_0^2 R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} [t^{1/2} + t^{-1/2}]_1^{1+c_0^2 R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} \left( \sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$

Tillsammans har vi

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \rho_0 c_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_0^4} \left( \sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right) \\ &= \frac{\pi \rho_0}{c_0^3} \left( \sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$

Svaret kan skrivas om till

$$\begin{aligned} M &= \pi \rho_0 c_0 \left( \frac{2}{c_0^4} \left( \sqrt{1 + c_0^2 R^2} - 1 \right) - \frac{R^2}{c_0^2 \sqrt{1 + c_0^2 R^2}} \right) \\ &= \frac{\pi \rho_0 R^2}{c_0 \sqrt{1 + c_0^2 R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + c_0^2 R^2} - 1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2} + 1}. \end{aligned}$$

□

## 9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

där  $D$  är det område i första kvadranten i  $xy$ -planet som begränsas av kurvorna

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

**(4 p)**

*Lösning.* För att få ett enklare integrationsområde gör vi variabelbytet

$$u = x^2 - y^2, \quad v = xy.$$

Då motsvaras området  $D$  i  $xy$ -planet av rektangeln

$$1 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 3$$

i  $uv$ -planet. För att göra variabelbyte i integralen beräknar vi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2),$$

så att

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)},$$

och

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy &= \iint_E \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \iint_E \frac{x^2 + y^2}{xy} \cdot \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_E \frac{1}{v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \int_1^4 \frac{1}{v} du \right) dv \\ &= \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{3}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

□