



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2014-03-17

DEL A

1. Betrakta funktionen $f(x, y) = \sqrt{10 - x^2 - 2y^2}$.

(a) Beräkna riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ i den riktning som ges av vektorn $(4, 3)$. **(2 p)**

(b) Finns det någon riktning i vilken riktningsderivatan av f i punkten $(1, 2)$ antas värdet -5 ? **(2 p)**

Lösning. (a) Riktningsderivatan ges av $f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v}$, där $\|\vec{v}\| = 1$. Vi har $\vec{v} = \frac{1}{5}(4, 3)$ och

$$\nabla f = \left(-\frac{x}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{10 - x^2 - 2y^2}} \right).$$

I punkten $(1, 2)$ är $\nabla f = (-1, -4)$ vilket medför att

$$f'_{\vec{v}} = (-1, -4) \cdot \frac{1}{5}(4, 3) = -\frac{16}{5}.$$

(b) Låt α vara vinkeln mellan ∇f och \vec{v} , så att

$$f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v} = \|\nabla f\| \cdot 1 \cdot \cos \alpha.$$

Eftersom $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ får vi

$$-\|\nabla f\| \leq f'_{\vec{v}} \leq \|\nabla f\|.$$

I punkten $(1, 2)$ är $\|\nabla f\| = \sqrt{17}$. Eftersom $-5 < -\sqrt{17}$ antas inte värdet -5 för någon riktning.

□

2. Visa att $(1, -1)$ är en stationär punkt till funktionen $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + 2x^2$ och avgör dess typ. **(4 p)**

Lösning. Vi beräknar de partiella derivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Genom insättning ser vi att

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 0$$

vilket visar att $(1, -1)$ är en stationär punkt.

För att avgöra vilken typ av stationär punkt det är betraktar vi den kvadratiske formen

$$Q(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a, b)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)h_2^2$$

i punkten $(a, b) = (1, -1)$. Vi har att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y + 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

så

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1, -1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = 2.$$

Den kvadratiske formen Q blir alltså

$$Q(h_1, h_2) = 8h_1h_2 + 2h_2^2,$$

vilket vi kvadratkompletterar till

$$Q(h_1, h_2) = 2(h_2 + 2h_1)^2 - 8h_1^2.$$

Detta är en indefinit kvadratisk form, och vi drar slutsatsen att punkten $(1, -1)$ är en sadelpunkt. \square

3. Beräkna volymen av det område som är under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och ovanför det område i xy -planet som bestäms av olikheterna $-x \leq y \leq \sqrt{3}x$. **(4 p)**

Lösning. Paraboloiden skär xy -planet då $z = 0$, skärningskurvan är alltså cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Volymen ges av

$$V = \iint_D (1 - (x^2 + y^2)) \, dx dy$$

Där D är den cirkelsektor i högra halvplanet som begränsas av linjerna $y = -x$ och $y = \sqrt{3}x$ samt cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Låt α vara vinkeln mellan x -axeln och linjen $y = \sqrt{3}x$. Då gäller att $\tan \alpha = \sqrt{3}$ så $\alpha = \pi/3$. Vinkeln mellan x -axeln och linjen $y = -x$ är $-\pi/4$.

Med polära koordinater r och ϕ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} \left(\int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \right) d\phi \\ &= \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{7\pi}{48}. \end{aligned}$$

□

DEL B

4. (a) Formulera Greens formel. Ange alla förutsättningar. (1 p)
 (b) Använd Greens formel för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy$$

där γ är den kurva som sammansätts av parabeln $y = x^2$ från punkten $(-1, 1)$ till punkten $(1, 1)$ och den räta linjen därifrån tillbaka till punkten $(-1, 1)$. (3 p)

Lösning. (a) Se kursboken sidan 335.

(b) Vi har

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y} (x - y^2) = -2y.$$

Greens formel ger alltså att

$$\oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy = \iint_D 2(x + y) dx dy$$

där D är området i xy -planet som beskrivs av $-1 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq 1$. På grund av symmetri är $\iint_D 2x dx dy = 0$, så vi får att

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (x - y^2) dx + (x^2 + y^2) dy &= \iint_D 2y dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 2y dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left([y^2]_{x^2}^1 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

□

5. Bestäm det största och minsta värde som funktionen $f(x, y) = x(y-1)$ antar i det område som ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$. **(4 p)**

Lösning. Eftersom funktionen f är ett polynom är den kontinuerligt deriverbar och eftersom dessutom området är kompakt (slutet och begränsat) vet vi att största och minsta värde antas i en av följande punkter:

- (a) inre stationära punkter,
- (b) randpunkter som uppfyller Lagrangevillkoret,
- (c) singulära randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

- (a) I en stationär punkt är

$$\nabla f = (y-1, x) = (0, 0).$$

Vi ser att detta bara inträffar då $(x, y) = (0, 1)$, vilket är en punkt på randen och inte i det inre till området.

- (b) De två randcirkeln till området kan skrivas som

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad \text{resp.} \quad g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0,$$

och Lagrangevillkoret är uppfyllt i punkter där ∇f är parallell med ∇g_1 resp. ∇g_2 . Detta kan vi uttrycka med villkoret

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} -\nabla f & - \\ -\nabla g_i & - \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} y-1 & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= 2y(y-1) - 2x^2 \\ &= 2(y^2 - x^2 - y). \end{aligned}$$

På den inre randcirkeln har vi $x^2 = 1 - y^2$. Detta insatt i Lagrangevillkoret $y^2 - x^2 - y = 0$ ger

$$y^2 - (1 - y^2) - y = 2y^2 - y - 1 = 0$$

vilket har lösningarna $y = -1/2$ och $y = 1$. Vi får alltså tre punkter $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$, $(0, 1)$ på den inre randcirkeln.

På den yttre randcirkeln är $x^2 = 3 - y^2$, och detta ger

$$y^2 - (3 - y^2) - y = 2y^2 - y - 3 = 0.$$

Vi hittar lösningarna $y = -1$ och $y = 3/2$ vilket ger fyra punkter $(\pm\sqrt{2}, -1)$, $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$.

- (c) En punkt på randkurvan $g_1 = 0$ är en singulär punkt om $\nabla g_i = 0$. Eftersom $\nabla g_i = (2x, 2y)$ ser vi att detta bara inträffar i origo, som inte ligger på randen.

Funktionen antar alltså sitt största och minsta värde i någon av punkterna $(\pm\sqrt{3}/2, 1)$, $(0, 1)$, $(\pm\sqrt{2}, -1)$, $(\pm\sqrt{3}/2, 3/2)$. Eftersom

$$f(\pm\sqrt{3}/2, -1/2) = \mp 3\sqrt{3}/4$$

$$f(0, 1) = 0,$$

$$f(\pm\sqrt{2}, -1) = \mp 2\sqrt{2},$$

$$f(\pm\sqrt{3}/2, 3/2) = \pm\sqrt{3}/4$$

så drar vi slutsatsen att

- största värde är $2\sqrt{2}$ och antas i punkten $(-\sqrt{2}, -1)$,
- minsta värde är $-2\sqrt{2}$ och antas i punkten $(\sqrt{2}, -1)$.

□

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (-y, x, z^2)$ ned genom konytan som beskrivs av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$. **(4 p)**

Lösning. Alternativ 1: Vi parametriserar konytan genom $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ där (x, y) ligger i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. Då är

$$\hat{N} dS = \pm (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy = \pm \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy$$

där tecknet \pm bestäms av ytans orientering. Eftersom vi ska beräkna flödet ner genom ytan ska vi ha en normalvektor med negativ z -komponent, så vi väljer alltså

$$\begin{aligned} \hat{N} dS &= - \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) dx dy \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy. \end{aligned}$$

I parametriseringen blir vektorfältet $\mathbf{F} = (-y, x, z^2) = (-y, x, x^2 + y^2)$ och

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= (-y, x, x^2 + y^2) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dx dy \\ &= \left(-\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2 - y^2 \right) dx dy \\ &= -(x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Vi får alltså att flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS &= - \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \right) d\phi \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alternativ 2: Vi vill beräkna flödet genom att använda divergenssatsen och slutar därför till konytan S genom att lägga till cirkelskivan S_1 som beskrivs av $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 1$.

Divergensen av vektorfältet \mathbf{F} är

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} (-y) + \frac{\partial}{\partial y} (x) + \frac{\partial}{\partial z} (z^2) = 0 + 0 + 2z = 2z.$$

Divergenssatsen ger att

$$\iint_{S+S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_K 2z \, dxdydz$$

där K är det inneslutna området.

Volymsintegralen blir

$$\iiint_K 2z \, dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 2z \, dz \right) dxdy = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dxdy$$

där D är områdets projektion på cirkelskivan, dvs. cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$. I polära koordinater blir denna integral

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \right) d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Vi beräknar nu flödet genom ytan S_1 där $\hat{N} = (0, 0, 1)$. Detta flöde ges av

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iint_{S_1} (-y, x, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dS = \iint_{S_1} dS = \pi.$$

Slutligen får vi

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} \, dxdydz - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} \, dS = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

□

DEL C

7. Betrakta ekvationen

$$x^y + y = 3$$

i området $x, y > 0$. Visa att i en omgivning av punkten $(1, 2)$ så definierar denna ekvation y som en funktion av x , alltså $y = f(x)$. Beräkna också $f'(1)$. **(4 p)**

Lösning. Sätt $F(x, y) = x^y + y$. Då är $F(1, 2) = 3$ så $(1, 2)$ uppfyller ekvationen och F är en C^1 -funktion i en omgivning av $(1, 2)$. Vidare är

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (e^{y \ln x} + y) = \ln x e^{y \ln x} + 1 = \ln x x^y + 1$$

så

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2) = (\ln 1) \cdot 1^2 + 1 = 1 \neq 0.$$

Implicita funktionssatsen säger oss nu att det finns en öppen omgivning U av $(1, 2)$ där sambandet $F(x, y) = x^y + y = 3$ definierar y som en funktion av x , $y = f(x)$, där f är en C^1 -funktion.

Derivering av identiteten

$$x^{f(x)} + f(x) = e^{f(x) \ln x} + f(x) = 3$$

ger

$$\left(f'(x) \ln x + f(x) \frac{1}{x} \right) x^{f(x)} + f'(x) = 0$$

Sätter vi in $x = 1$ och $f(1) = 2$ får vi

$$\left(f'(1) \cdot 0 + f(1) \frac{1}{1} \right) 1^{f(1)} + f'(1) = \left(f'(1) \cdot 0 + 2 \frac{1}{1} \right) 1^2 + f'(1) = 2 + f'(1) = 0.$$

Alltså är $f'(1) = -2$. □

8. Halvklotet $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$, där R är given har masstätheten

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0 c_0 z}{(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2))^{3/2}}$$

där ρ_0 (kg/m³) och c_0 (m⁻¹) är fysikaliska konstanter (x, y, z i m). Ge en formel för halvklotets massa. **(4 p)**

Lösning. Klotets massa ges av integralen

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_K \frac{\rho_0 c_0 z}{(1 + c_0^2(x^2 + y^2 + z^2))^{3/2}} \, dx dy dz.$$

För att beräkna denna byter vi till rympolära koordinater. Då är $z = r \cos \theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq R$, och Jacobianen är $r^2 \sin \theta$. Vi får

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^R \frac{\rho_0 c_0 r \cos \theta}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\phi \\ &= 2\pi \rho_0 c_0 \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R \frac{r^3}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} \, dr \right). \end{aligned}$$

Här är

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

Variabelbytet $1 + c_0^2 r^2 = t$ ger $r^2 = c_0^{-2}(t - 1)$ och $r dr = 2^{-1} c_0^{-2} dt$, så

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{r^3}{(1 + c_0^2 r^2)^{3/2}} \, dr &= \int_1^{1+c_0^2 R^2} \frac{c_0^{-2}(t-1)}{t^{3/2}} 2^{-1} c_0^{-2} dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \int_1^{1+c_0^2 R^2} \left(\frac{1}{t^{1/2}} - \frac{1}{t^{3/2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2c_0^4} \left[\frac{t^{1/2}}{1/2} - \frac{t^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{1+c_0^2 R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} [t^{1/2} + t^{-1/2}]_1^{1+c_0^2 R^2} \\ &= \frac{1}{c_0^4} \left(\sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$

Tillsammans har vi

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \rho_0 c_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_0^4} \left(\sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right) \\ &= \frac{\pi \rho_0}{c_0^3} \left(\sqrt{1 + c_0^2 R^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + c_0^2 R^2}} - 2 \right). \end{aligned}$$

Svaret kan skrivas om till

$$\begin{aligned} M &= \pi\rho_0c_0 \left(\frac{2}{c_0^4} \left(\sqrt{1 + c_0^2R^2} - 1 \right) - \frac{R^2}{c_0^2\sqrt{1 + c_0^2R^2}} \right) \\ &= \frac{\pi\rho_0R^2}{c_0\sqrt{1 + c_0^2R^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + c_0^2R^2} - 1}{\sqrt{1 + c_0^2R^2} + 1}. \end{aligned}$$

□

9. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

där D är det område i första kvadranten i xy -planet som begränsas av kurvorna

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

(4 p)

Lösning. För att få ett enklare integrationsområde gör vi variabelbytet

$$u = x^2 - y^2, \quad v = xy.$$

Då motsvaras området D i xy -planet av rektangeln

$$1 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 3$$

i uv -planet. För att göra variabelbyte i integralen beräknar vi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2),$$

så att

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)},$$

och

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv.$$

Integralen blir alltså

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy &= \iint_E \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \iint_E \frac{x^2 + y^2}{xy} \cdot \frac{1}{2(x^2 + y^2)} du dv \\ &= \frac{1}{2} \iint_E \frac{1}{v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\int_1^4 \frac{1}{v} du \right) dv \\ &= \frac{3}{2} \int_1^3 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{3}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

□